

Capítulo 5

INTEGRAL MÚLTIPLE

SECCIONES

1. Integrales dobles sobre rectángulos.
2. Integrales dobles sobre regiones generales.
3. Cambio de variables en la integral doble.
4. Integrales triples.
5. Ejercicios propuestos.

1. INTEGRALES DOBLES SOBRE RECTÁNGULOS.

Así como la integral simple resuelve el problema del cálculo de áreas de regiones planas, la integral doble es la herramienta natural para el cálculo de volúmenes en el espacio tridimensional. En estas notas se introduce el concepto de integral múltiple, el cual incluye los casos anteriores en un contexto general. De este modo, las aplicaciones no se limitan al cálculo de áreas y volúmenes sino que se extienden a otros problemas físicos y geométricos.

5.1. Integral sobre regiones elementales.

5.1.1. Definiciones previas.

Todo conjunto de la forma $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ recibe el nombre de intervalo n -dimensional o **n -intervalo**.

Una **partición** de I se define al dividir cada intervalo $[a_i, b_i]$ mediante los puntos $\{x_0^i, \dots, x_{m_i}^i\}$ y formar las celdas n -dimensionales $J_k = [x_{j_1}^1, x_{j_1+1}^1] \times \cdots \times [x_{j_n}^n, x_{j_n+1}^n]$, $0 \leq j_i \leq m_i - 1$ ($i = 1, \dots, n$). De este modo, una partición de un n -intervalo I es un conjunto $P = \{J_1, \dots, J_N\}$, formado por celdas n -dimensionales, tal que $J_i \cap J_k = \emptyset$ ($i \neq k$), y $J_1 \cup \cdots \cup J_N = I$.

Dada una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ acotada, si definimos la **medida n -dimensional** de una celda como el producto de las longitudes de sus aristas, llamaremos **suma inferior** de f con respecto a la partición P a

$$L(f, P) = \sum_{J_k \in P} \inf\{f(x) : x \in J_k\} \cdot m(J_k).$$

Análogamente, la **suma superior** de f respecto a P es

$$U(f, P) = \sum_{J_k \in P} \sup\{f(x) : x \in J_k\} \cdot m(J_k).$$

5.1.2. Propiedades.

- i) $L(f, P) \leq U(f, P)$, para toda partición P de I .
- ii) Si P' es un refinamiento de P (es decir, cada celda de P' está contenida en alguna celda de P), entonces $L(f, P) \leq L(f, P')$ y $U(f, P') \leq U(f, P)$.
- iii) Si P' y P'' son dos particiones arbitrarias de I , $L(f, P') \leq U(f, P'')$.
- iv) $\sup\{L(f, P) : P \text{ partición de } I\} \leq \inf\{U(f, P) : P \text{ partición de } I\}$.

5.1.3. Definición.

Se define la **integral superior** de f sobre I a

$$\overline{\int}_I f = \inf\{U(f, P) : P \text{ partición de } I\}.$$

Del mismo modo, se define la **integral inferior** de f sobre I a

$$\underline{\int}_I f = \sup\{L(f, P) : P \text{ partición de } I\}.$$

Diremos que la función f es **integrable** sobre I cuando $\overline{\int}_I f = \underline{\int}_I f$ y dicho valor común se llama **integral** de f sobre I , que denotaremos por $\int_I f$. En el caso particular $n = 2$ utilizaremos frecuentemente la notación $\iint_I f(x, y) dx dy$ y, si $n = 3$, utilizaremos la notación análoga $\iiint_I f(x, y, z) dx dy dz$.

5.1.4. Teorema.

Sea $f : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Son equivalentes:

- i) f es integrable en I .
- ii) (Condición de Riemann.) Para todo $\varepsilon > 0$, existe P_ε partición de I tal que $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.
- iii) (Condición de Darboux.) Existe una constante L con la siguiente propiedad:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \left| \sum_{i=1}^N f(x_i) m(J_i) - L \right| < \varepsilon,$$

donde $P = \{J_1, \dots, J_N\}$ es una partición de I cuyas aristas tienen longitud menor que δ y $x_i \in J_i$ ($i = 1, \dots, N$).

Demostración. Supongamos en primer lugar que f es integrable y veamos que se cumple la condición de Riemann. Llamemos $L = \int_I f$. Por definición de ínfimo, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición P'_ε tal que $U(f, P'_\varepsilon) < L + \varepsilon/2$.

Análogamente, existe una partición P''_ε tal que $L(f, P''_\varepsilon) > L - \varepsilon/2$. Si llamamos $P_\varepsilon = P'_\varepsilon \cup P''_\varepsilon$, entonces

$$L - \varepsilon/2 < L(f, P''_\varepsilon) < L(f, P_\varepsilon) \leq U(f, P_\varepsilon) < U(f, P'_\varepsilon) < L + \varepsilon/2.$$

Por tanto, $U(f, P_\varepsilon) - L(f, P_\varepsilon) < \varepsilon$.

Supongamos ahora que se cumple la condición de Riemann y veamos que f es integrable en I .

Como $L(f, P) \leq \int_I f \leq \bar{\int}_I f \leq U(f, P)$, entonces $\bar{\int}_I f - \int_I f < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, con lo cual $\bar{\int}_I f = \int_I f$.

Probemos ahora la equivalencia entre i) y iii). Supongamos en primer lugar que se cumple la condición de Darboux. Así pues, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^N f(x_i) m(J_i) - L \right| < \varepsilon/2.$$

Elegimos también $x_i \in J_i$ de modo que

$$|f(x_i) - \sup\{f(x) : x \in J_i\}| < \frac{\varepsilon}{m(J_i) \cdot 2N}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} |U(f, P) - L| &\leq \left| U(f, P) - \sum_{i=1}^N f(x_i) m(J_i) \right| + \left| \sum_{i=1}^N f(x_i) m(J_i) - L \right| \\ &< \sum_{i=1}^N \frac{\varepsilon \cdot m(J_i)}{m(J_i) \cdot 2N} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Análogamente se prueba para las sumas inferiores.

Para probar el recíproco, necesitamos el siguiente resultado.

Lema. *Dada una partición P de I y cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada partición P' en celdas de aristas con longitud menor que δ , la suma de las medidas de las celdas de P' que no están totalmente contenidas en alguna celda de P es menor que ε .*

Demostración. Para demostrarlo, separaremos dos casos:

$n = 1$: Si $P = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, basta elegir $\delta = \varepsilon/N$ porque los intervalos de P' que no estén contenidos en algún intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ deben incluir algún x_k , $k = 1, \dots, N-1$; por tanto, la suma de sus longitudes es menor que $N \cdot \delta$ (número de intervalos multiplicado por la longitud de cada uno).

$n > 1$: Si $P = \{J_1, \dots, J_N\}$, llamamos T a la longitud total de las aristas situadas entre dos celdas cualesquiera de P y elegimos $\delta = \varepsilon/T$.

Sea $J' \in P'$ una celda no contenida en ningún J_k . Esto indica que corta a dos celdas adyacentes de P . Por tanto, su n -medida es menor o igual que $\delta \cdot A$, donde A es la medida de las caras comunes a dichas celdas. Entonces $\sum_{J' \in P', J' \not\subset J_k} m(J') \leq \delta \cdot T = \varepsilon$. \square

Terminemos ahora la demostración del teorema suponiendo que f es integrable en I . Por ser f acotada, existe M tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in I$.

Por ser f integrable, existen dos particiones P_1, P_2 tales que:

$$\begin{aligned} L - L(f, P_1) &< \varepsilon/2 \\ U(f, P_2) - L &< \varepsilon/2 \end{aligned}$$

(donde L es la integral y $\varepsilon > 0$ arbitrario).

Si P es un refinamiento de P_1 y P_2 , entonces

$$U(f, P) - \varepsilon/2 < L < L(f, P) + \varepsilon/2.$$

Por el lema anterior, existe $\delta > 0$ tal que si P' es una partición de I cuyas aristas tienen longitud menor que δ , entonces

$$\sum_{J' \in P', J' \not\subset J_k, J_k \in P} m(J') < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Sea $P' = \{S_1, \dots, S_N\}$ una partición de aristas con longitud menor que δ donde cada S_1, \dots, S_k está contenido en alguna celda de P y S_{k+1}, \dots, S_N no lo están. Si $x_j \in S_j$, entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N f(x_j)m(S_j) &= \sum_{j=1}^k f(x_j)m(S_j) + \sum_{j=k+1}^N f(x_j)m(S_j) \leq U(f, P) + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} < L + \varepsilon. \\ \sum_{j=1}^N f(x_j)m(S_j) &= \sum_{j=1}^k f(x_j)m(S_j) - \sum_{j=k+1}^N -f(x_j)m(S_j) \geq L(f, P) - M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} > L - \varepsilon. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left| \sum_{j=1}^N f(x_j)m(S_j) - L \right| < \varepsilon,$$

lo que corresponde a la condición de Darboux. \square

Ejemplos. Estudiar la integrabilidad y calcular la integral (en caso de existir) de las siguientes funciones en las regiones indicadas:

a) $f(x, y) = [x] + [y], (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

b) $f(x, y) = [x + y], (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$.

c) $f(x, y) = \text{sen}(x + y)$, $(x, y) \in [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

d) $f(x, y) = x^3 + 3x^2y + y^3$, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

e) $f(x, y) = \sqrt{|y - x^2|}$, $(x, y) \in [-1, 1] \times [0, 2]$.

5.2. Extensión del concepto de integral a regiones acotadas.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado tal que $A \subset I$, donde I es un n -intervalo, y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada. Decimos que f es **integrable en A** cuando

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \in I \setminus A \end{cases}$$

es integrable en I .

Esto sugiere que el tipo de regiones para las que una función es integrable no puede tener “frontera muy complicada”. Por tanto, necesitamos las siguientes definiciones.

5.2.1. Definición.

Un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene **contenido (según Jordan)** si la función constante $f(x) = 1$ es integrable en A . En este caso, el contenido de A se define como $c(A) = \int_A 1$.

Por definición de integral, un conjunto A tiene **contenido cero** si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \{J_1, \dots, J_N\} \text{ } n\text{-intervalos que cubren a } A : \sum_{i=1}^N m(J_i) < \varepsilon.$$

Diremos entonces que un conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$ es un **dominio de Jordan** si su frontera tiene contenido cero.

Ejemplo. La gráfica de una función $y = f(x)$ continua en $[a, b]$ tiene contenido cero en \mathbb{R}^2 .

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, como f es uniformemente continua en $[a, b]$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ si $|x - y| < \delta$.

Sea $\{x_0, x_1, \dots, x_N\}$ una partición de $[a, b]$ con $x_j = a + jh$ ($j = 0, 1, \dots, N$), donde $h = (b - a)/N$ y elegimos N suficientemente grande para que $h < \delta$. Si llamamos

$$R_j = \{(x, y) : x_{j-1} \leq x \leq x_j, |y - f(x_j)| < \varepsilon\},$$

entonces $(x, f(x)) \in R_j$ cuando $x_{j-1} \leq x \leq x_j$, es decir la gráfica de f está contenida en $\bigcup_{j=1}^N R_j$. Como el área de R_j es igual a $2\varepsilon(x_j - x_{j-1})$, entonces la suma de las áreas de todos los rectángulos es igual a $2\varepsilon(b - a)$.

De forma similar se puede probar que la gráfica de cualquier función continua $z = f(x, y)$ sobre un rectángulo $[a, b] \times [c, d]$ tiene contenido cero en \mathbb{R}^3 .

5.2.2. Definición.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, no necesariamente acotado, tiene **medida nula (según Lebesgue)** cuando

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \{J_m\}_{m \in \mathbb{N}} \text{ } n\text{-intervalos que cubren a } A : \sum_{m \in \mathbb{N}} m(J_m) < \varepsilon.$$

Ejemplo. Para ver que \mathbb{R} tiene medida cero en \mathbb{R}^2 , para cada $\varepsilon > 0$, basta elegir $J_n = [-n, n] \times \left[-\frac{\varepsilon}{2n \cdot 2^{n+1}}, \frac{\varepsilon}{2n \cdot 2^{n+1}}\right]$. De este modo, $m(J_n) = \varepsilon/2^n$ y $\sum_{n \in \mathbb{N}} \varepsilon/2^n = \varepsilon$.

5.2.3. Propiedades.

- Si A tiene contenido nulo, entonces tiene medida nula.
- Si A tiene medida nula y $B \subset A$, entonces B tiene medida nula.
- Si $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ tienen medida nula en \mathbb{R}^n , entonces $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ tiene medida nula en \mathbb{R}^n .

[Por ejemplo, la sucesión $\{x_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, con $x_m \in \mathbb{R}^n$, tiene medida nula.]

En efecto, existe para cada $i \in \mathbb{N}$ un recubrimiento $\{B_{i1}, B_{i2}, \dots\}$ de A_i tal que $\sum_{j \in \mathbb{N}} c(B_{ij}) < \varepsilon/2^i$. Entonces $\{B_{11}, B_{12}, \dots, B_{m1}, B_{m2}, \dots\}$ recubre a $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$ y

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} c(B_{ij}) < \varepsilon.$$

- Todo subconjunto de \mathbb{R}^m tiene n -medida cero si $m < n$.

5.2.4. Proposición.

Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada e integrable, $f(x) = 0 \forall x \in A \setminus F$, donde F es un conjunto de contenido cero, entonces $\int_A f = 0$.

Demostración. Como f es acotada, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M, \forall x \in A$. Por otra parte, como F tiene contenido cero, dado $\varepsilon > 0$, $F \subset \bigcup_{j=1}^N R_j$, con $\sum_{j=1}^N m(R_j) < \varepsilon/M$.

Llamamos R a un n -rectángulo que contiene a A y extendemos f a R de la manera usual. Sea P una partición de R tal que $R_j \in P, \forall j$. Entonces,

$$-\varepsilon \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq \varepsilon,$$

con lo que $\int_A f = 0$. □

5.2.5. Teorema de Lebesgue.

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Si $A \subset I$, donde I es un n -intervalo, entonces f es integrable en A si y sólo si el conjunto de discontinuidades de f en I tiene medida nula.

Demostración. Definimos la oscilación de una función f en un punto $x_0 \in I$ como

$$\omega(f, x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in B(x_0, h) \cap I\}.$$

Antes de proceder a la demostración veamos un par de resultados previos.

Lema 1. $\omega(f, x_0) = 0 \iff f$ es continua en x_0 .

Para probarlo, basta observar que f es continua en x_0 si y sólo si $\forall \varepsilon > 0$ existe $B(x_0, h)$ tal que $\sup\{|f(x) - f(x_0)| : x \in B(x_0, h)\} < \varepsilon$ lo cual equivale a su vez a que $\omega(f, x_0) = 0$.

Lema 2. El conjunto $D_r = \{x \in I : \omega(f, x) \geq 1/r\}$ es compacto.

En primer lugar, D_r es acotado por estar contenido en el n -intervalo I . Para ver que es cerrado, sea y un punto de acumulación de D_r y supongamos que $y \notin D_r$. Así pues, $\omega(f, y) < 1/r$ y, por definición de oscilación, existe una bola $B(y, h)$ tal que

$$\sup\{|f(u) - f(v)| : u, v \in B(y, h) \cap I\} < 1/r.$$

Por tanto, $B(y, h) \cap D_r = \emptyset$, lo que contradice el hecho de ser punto de acumulación.

Vayamos ahora con la demostración del teorema. Supongamos en primer lugar que el conjunto D de discontinuidades de f en I tiene medida cero. Como $D = \cup_{r \in \mathbb{N}} D_r$, también cada D_r tiene medida cero. Al ser compacto, sólo un número finito de n -intervalos recubren a D_r . Tenemos así que

$$D_r \subset \bigcup_{i=1}^N J_i, \quad \sum_{i=1}^N m(J_i) < 1/r.$$

Consideremos ahora una partición de I suficientemente fina para que esté formada por $C_1 \cup C_2$, donde C_1 esté formado por las n -celdas contenidas en algún J_i y C_2 por las n -celdas disjuntas con D_r .

De este modo, si $J \in C_2$, $\omega(f, x) < 1/r, \forall x \in J$. Por tanto, existe $h > 0$ tal que $M_h(f) - m_h(f) < 1/r$, donde $M_h(f) = \sup\{f(y) : y \in B(x, h)\}$ y $m_h(f) = \inf\{f(y) : y \in B(x, h)\}$. Como J es compacto, una colección finita de $\{B(x, h) : x \in J\}$, digamos $\{U_1, \dots, U_m\}$, recubre a J .

Dividimos J en celdas de modo que cada una de ellas esté en alguno de $\{U_1, \dots, U_m\}$. La partición resultante verifica

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &\leq \left(\sum_{J \in C_1} + \sum_{J \in C_2} \right) (M_J(f) - m_J(f)) \cdot m(J) \\ &\leq \sum_{J \in C_1} 2K \cdot m(J) + m(I)/r < 2K/r + m(I)/r < \varepsilon \end{aligned}$$

(donde hemos supuesto que $|f(x)| \leq K, \forall x \in I$).

Probemos ahora el recíproco, para lo cual supongamos que f es integrable. Escribimos nuevamente $D = \cup_{r \in \mathbb{N}} D_r$, con $D_r = \{x \in I : \omega(f, x) \geq 1/r\}$. Por hipótesis, existe una partición P de I tal que

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{J \in P} (M_J(f) - m_J(f)) \cdot m(J) < \varepsilon.$$

Hacemos $D_r = J_1 \cup J_2$, con $J_1 = \{x \in D_r : x \in \text{fr } J, \text{ para algún } J \in P\}$ y $J_2 = \{x \in D_r : x \in \bigcap J, \text{ para algún } J \in P\}$. Es claro que J_1 tiene medida nula.

Sea C el conjunto de las celdas de P que tienen un elemento de D_r en su interior. Si $J \in C$, entonces $M_J(f) - m_J(f) \geq 1/r$ y

$$\frac{1}{r} \sum_{J \in C} m(J) \leq \sum_{J \in C} (M_J(f) - m_J(f)) \cdot m(J) \leq \sum_{J \in P} (M_J(f) - m_J(f)) \cdot m(J) < \varepsilon.$$

□

5.2.6. Consecuencias del teorema de Lebesgue.

- Un conjunto acotado A tiene contenido (según Jordan), es decir la función constante 1 es integrable si y sólo si la frontera de A tiene medida nula.
- Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto acotado que tiene contenido y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada con una cantidad finita o numerable de puntos de discontinuidad. Entonces f es integrable.

Teorema. a) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y tiene medida nula y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, entonces $\int_A f = 0$.

b) Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable, $f(x) \geq 0$, $\forall x$ y $\int_A f = 0$, entonces el conjunto $\{x \in A : f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula.

Demostración. a) Supongamos que A es un conjunto de medida nula y sea S un n -intervalo que contiene a A . Extendemos f a S haciendo $f(x) = 0$, si $x \in S \setminus A$.

Sean $P = \{S_1, S_2, \dots, S_N\}$ una partición de S y M una constante tales que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in A$. Entonces

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^N m_i(f) \cdot m(S_i) \leq M \cdot \sum_{i=1}^N m_i(\chi_A) \cdot m(S_i).$$

Si $m_i(\chi_A) \neq 0$ para algún i , entonces $S_i \subset A$ lo que es absurdo pues $m(A) = 0$ pero $m(S_i) \neq 0$.

En definitiva, $L(f, P) \leq 0$.

Análogamente,

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^N M_i(f) \cdot m(S_i) = - \sum_{i=1}^N m_i(-f) \cdot m(S_i) = -L(-f, P) \geq 0.$$

Como f es integrable y $L(f, P) \leq 0 \leq U(f, P)$, entonces $\int_A f = 0$.

b) Sea $A_r = \{x \in A : f(x) > 1/r\}$ y veamos que tiene contenido nulo.

Sea S un rectángulo que contiene a A y P una partición de S tal que $U(f, P) < \varepsilon/r$ (f se extiende a S de la forma usual). Si $\{S_1, \dots, S_k\} \subset P$ tienen intersección no nula con A_r ,

$$\sum_{i=1}^k m(S_i) \leq \sum_{i=1}^k r \cdot M_i(f) \cdot m(S_i) \leq r \cdot U(f, P) < \varepsilon$$

lo que indica que A_r tiene contenido nulo.

Como $A = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} A_r$, A tiene medida nula. □

Ejemplos.

- 1) $f(x) = \sin(1/x)$ es integrable en $[-1, 1]$.
- 2) $f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \sin(1/y) & \text{si } y \neq 0 \\ x^2 & \text{si } y = 0 \end{cases}$ es integrable en $B(0, 1)$.

5.3. Propiedades de la integral.

Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ acotados, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ integrables, $k \in \mathbb{R}$.

- i) $f + g$ es integrable y $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$.
- ii) kf es integrable y $\int_A (kf) = k \int_A f$.
- iii) $|f|$ es integrable y $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.
- iv) Si $f \leq g$, entonces $\int_A f \leq \int_A g$.
- v) Si A tiene contenido y $|f| \leq M$, entonces $|\int_A f| \leq M \cdot c(A)$.
- vi) Si f es continua, A tiene contenido y es compacto y conexo, entonces existe $x_0 \in A$ tal que $\int_A f = f(x_0) \cdot c(A)$.
- vii) Sea $f : A \cup B \rightarrow \mathbb{R}$. Si $A \cap B$ tiene medida nula y $f|_{A \cap B}, f|_A, f|_B$ son integrables, entonces f es integrable en $A \cup B$ y $\int_{A \cup B} f = \int_A f + \int_B f$.

5.3.1. Teorema del valor medio.

Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de Jordan compacto y conexo y sea $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $g : K \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada, $g(x) \geq 0, \forall x \in K$ y es continua excepto en un conjunto de contenido cero, entonces existe $z \in K$ tal que

$$\int_K f \cdot g = f(z) \int_K g.$$

Demostración. Sean $u, v \in K$ tales que $f(u) \leq f(x) \leq f(v), \forall x \in K$. Como g es no negativa,

$$f(u) \cdot g(x) \leq f(x) \cdot g(x) \leq f(v) \cdot g(x), \forall x \in K,$$

de donde

$$f(u) \int_K g \leq \int_K f \cdot g \leq f(v) \int_K g.$$

Si $\int_K g = 0$, entonces $\int_K f \cdot g = 0$ y el teorema es cierto para cualquier $z \in K$.

Si $\int_K g > 0$, entonces

$$f(u) \leq \frac{\int_K f \cdot g}{\int_K g} \leq f(v).$$

Por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existe $z \in K$ tal que $f(z) = \frac{\int_K f \cdot g}{\int_K g}$.

□

5.4. Integrales impropias.

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y no negativa, con A no acotado. Extendemos f a todo \mathbb{R}^n de la manera usual. Decimos que f es integrable en A cuando f es integrable en todo n -intervalo $[-a, a]^n$ y existe $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{[-a, a]^n} f$.

Nota. Al ser f no negativa, podemos expandir la región de integración simétricamente. Por ejemplo, la función $f(x) = x$ cambia de signo y resulta que $\int_{-a}^a x dx = 0$ con lo que $\int_{-\infty}^{\infty} f = 0$ pero $\int_{-\infty}^0 f$ y $\int_0^{\infty} f$ no existen.

5.4.1. Teorema.

Si $f \geq 0$, está acotada y es integrable en cada $[-a, a]^n$, entonces f es integrable si y sólo si dada cualquier sucesión $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de conjuntos acotados con contenido tales que $B_k \subset B_{k+1}$ y existe k tal que $C \subset B_k$, para todo n -cubo C , entonces existe $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{B_k} f$.

5.4.2. Definición.

a) Sea $f \geq 0$ no acotada definida en $A \subset \mathbb{R}^n$ no acotado. Para cada $M > 0$, se define

$$f_M(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \leq M \\ 0 & \text{si } f(x) > M \end{cases}.$$

Si existe $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_A f_M$, decimos que f es integrable en A .

b) Si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es arbitraria, sean

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}, \quad f^-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{si } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) > 0 \end{cases}.$$

Así, $f = f^+ - f^-$ y f es integrable en A si lo son f^+ y f^- y definimos $\int_A f = \int_A f^+ - \int_A f^-$.

Como $|f| = f^+ + f^-$, si f es integrable, también lo es $|f|$ y $\int_A |f| = \int_A f^+ + \int_A f^- \geq |\int_A f|$.

Recíprocamente, si $|f|$ es integrable y f es integrable en cada cubo, entonces f es integrable.

5.5. Teorema de Fubini.

Una herramienta fundamental para abordar el problema del cálculo de integrales múltiples se obtiene a partir del teorema de Fubini. Veremos que, en situaciones favorables, el cálculo de una integral n -dimensional se reduce al cálculo de n integrales simples, llamadas integrales iteradas.

A lo largo de esta sección, representaremos todo punto de \mathbb{R}^n como un par (x, y) , donde $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{n-k}$. Análogamente, todo n -intervalo lo escribiremos como $I = I_1 \times I_2$, con $I_1 \subset \mathbb{R}^k$, $I_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$.

5.5.1. Teorema.

Sean $I \subset \mathbb{R}^n$ un n -intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada e integrable en I .

a) Supongamos que, para cada $x \in I_1$, la función $f_x(y) = f(x, y)$ es integrable en I_2 . Si llamamos $g(x) = \int_{I_2} f_x(y) dy$, entonces g es integrable en I_1 y

$$\int_I f = \int_{I_1} g(x) dx = \int_{I_1} \left[\int_{I_2} f(x, y) dy \right] dx.$$

b) Si, para cada $y \in I_2$, la función $f_y(x) = f(x, y)$ es integrable en I_1 , entonces $g(y) = \int_{I_1} f_y(x) dx$ es integrable en I_2 y

$$\int_I f = \int_{I_2} g(y) dy = \int_{I_2} \left[\int_{I_1} f(x, y) dx \right] dy.$$

Demostración. Por simplicidad en la notación, haremos la demostración del apartado a) para el caso $n = 2$ (el apartado b) es completamente análogo). Si llamamos $I = [a, b] \times [c, d]$, como f es acotada en I , entonces g es acotada en $[a, b]$. Además,

$$|g(x)| \leq \int_c^d |f(x, y)| dy \leq (d - c) \cdot \sup_{(x, y) \in I} |f(x, y)|.$$

Por ser f integrable, dado $\varepsilon > 0$, existe una partición $P = \{R_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ de I , con $R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, tal que $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon$.

Si llamamos

$$M_{ij} = \sup_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y) \quad , \quad m_{ij} = \inf_{(x,y) \in R_{ij}} f(x, y),$$

$$N_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x) \quad , \quad n_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} g(x),$$

entonces, fijado $x \in [x_{i-1}, x_i]$:

$$m_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}) \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) dy \leq M_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Sumando para todos los valores de j ,

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}) \leq g(x) \leq \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}) \leq n_i \leq N_i \leq \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot (y_j - y_{j-1}).$$

Multiplicamos miembro a miembro por $(x_i - x_{i-1})$ y sumamos sobre i :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n m_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) &\leq \sum_{i=1}^m n_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^m M_i \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n M_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}). \end{aligned}$$

Esto quiere decir que

$$L(f, P) \leq L(g, P_x) \leq U(g, P_x) \leq U(f, P).$$

Deducimos así que $U(g, P_x) - L(g, P_x) < \varepsilon$, es decir g es integrable en $[a, b]$.

Además,

$$\int_I f = \sup L(f, P) \leq \int_a^b g(x) dx \leq \inf U(f, P) = \int_I f,$$

lo que demuestra el teorema. □

Corolario 1. Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces

$$\int_I f = \int_{I_1} \left(\int_{I_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{I_2} \left(\int_{I_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

Corolario 2. Sean $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, con $f_1(x) \leq f_2(x)$, $\forall x \in [a, b]$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ y $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces

$$\int_D f = \int_a^b \left(\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Demostración. Extendemos f a $I = [a, b] \times [c, d]$, donde $c \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq d$, definiendo $f(x, y) = 0$ si $(x, y) \in I \setminus D$. De este modo, el conjunto de discontinuidades de f está formado por los puntos $(x, f_1(x))$ y $(x, f_2(x))$ ($x \in [a, b]$), que tiene medida nula. Lo mismo ocurre con las funciones f_x y f_y , por lo que todas son integrables. Basta por tanto aplicar el teorema de Fubini para obtener el resultado. \square

Observaciones.

(1) Un resultado análogo se obtiene para regiones de la forma $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(y) \leq x \leq g_2(y), c \leq y \leq d\}$, con $g_1, g_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continuas, tales que $g_1(y) \leq g_2(y)$, $\forall y \in [c, d]$. En este caso, la integral se calcula como

$$\int_D f = \int_c^d \left(\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

En algunos casos, la región de integración se puede escribir de dos formas diferentes, por ejemplo:

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g_1(y) \leq x \leq g_2(y), c \leq y \leq d\}. \end{aligned}$$

Entonces se puede calcular la integral doble de una función continua en D de dos formas diferentes. En la práctica ha de elegirse la que simplifique los cálculos.

(2) Si $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ es discontinua en un segmento $\{(x, y) : a \leq x \leq b, y = y_0\}$, entonces $\int_a^b f_{y_0}(x) dx$ no existe; sin embargo, existe la integral doble $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$.

Esto sugiere que se extienda el teorema de Fubini para tener en cuenta las integrales superior e inferior.

5.5.2. Teorema.

Sea f acotada en $I = [a, b] \times [c, d]$. Entonces

$$i) \int_I f \leq \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y) dy \right) dx \leq \overline{\int}_a^b \left(\int_c^d f_x(y) dy \right) dx \leq \overline{\int}_I f.$$

$$ii) \int_I f \leq \int_a^b \left(\int_c^d f_x(y) dy \right) dx \leq \overline{\int}_a^b \left(\int_c^d f_x(y) dy \right) dx \leq \overline{\int}_I f.$$

$$iii) \int_I f \leq \int_c^d \left(\int_a^b f_y(x) dx \right) dy \leq \overline{\int}_c^d \left(\int_a^b f_y(x) dx \right) dy \leq \overline{\int}_I f.$$

$$iv) \int_I f \leq \int_c^d \left(\int_a^b f_y(x) dx \right) dy \leq \overline{\int}_c^d \left(\int_a^b f_y(x) dx \right) dy \leq \overline{\int}_I f.$$

v) Si existe $\int_I f$, entonces las desigualdades anteriores son igualdades.

Ejercicios.

(1) Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 2y & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ Probar:

a) Existe $\int_0^t f(x, y) dy$ para todo $t \in [0, 1]$ y

$$\int_0^1 \left(\int_0^t f(x, y) dy \right) dx = t^2, \quad \overline{\int}_0^1 \left(\int_0^t f(x, y) dy \right) dx = t.$$

Deducir que existe $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$.

b) Existe $\int_0^1 \left(\overline{\int}_0^1 f(x, y) dx \right) dy$.

c) La función f no es integrable en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

(2) Sea $A = \{(i/p, j/p) \in \mathbb{R}^2 : p \text{ es primo}, 1 \leq i, j \leq p-1\}$. Es fácil probar que cada recta horizontal o vertical corta a A como máximo en un número finito de puntos. Sin embargo, A no tiene contenido cero porque es denso en $Q = [0, 1] \times [0, 1]$. De hecho A es un conjunto sin contenido (su frontera no tiene contenido cero).

Si definimos $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x, y) \in A \\ 0 & \text{si } (x, y) \in Q \setminus A, \end{cases}$ entonces f

no es integrable en Q (la integral inferior vale cero y la integral superior vale 1). Sin embargo, existen $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$, pues f_x y f_y tienen un número finito de discontinuidades.

(3) Sea $f : Q = [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ ó } y \text{ son irracionales} \\ 1/n & \text{si } y \text{ es racional, } x = m/n \text{ con } m \text{ y } n \text{ primos entre sí y } n > 0. \end{cases}$$

Entonces $\int_Q f = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = 0$ pero $\int_0^1 f(x, y) dy$ no existe si x es racional.

(4) Calcular $\int_0^a dx \left(\int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2} dy \right).$

(5) Calcular $\int_1^2 dx \left(\int_0^{\ln x} (x-1) \sqrt{1+e^{2y}} dy \right).$

PROBLEMA 5.1

Calcular $\iint_R f$ en los siguientes casos:

(a) $f(x, y) = \frac{1}{(x+y)^2}$, $R = [3, 4] \times [1, 2]$.

(b) $f(x, y) = \frac{x^2}{1+y^2}$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

(c) $f(x, y) = ye^{xy}$, $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

(d) $f(x, y) = |\cos(x+y)|$, $R = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Solución

- (a) Como la función es simétrica respecto a sus variables, es indiferente el orden de las integrales iteradas. Podemos poner entonces:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x, y) dx dy &= \int_0^4 dx \int_1^2 \frac{1}{(x+y)^2} dy = \int_3^4 \left(\frac{-1}{x+y} \Big|_1^2 \right) dx \\ &= \int_3^4 \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x+1} \right) dx = \ln \frac{|x+1|}{|x+2|} \Big|_3^4 = \ln \frac{25}{24}. \end{aligned}$$

- (b) En este caso las variables se pueden separar, de modo que la integral

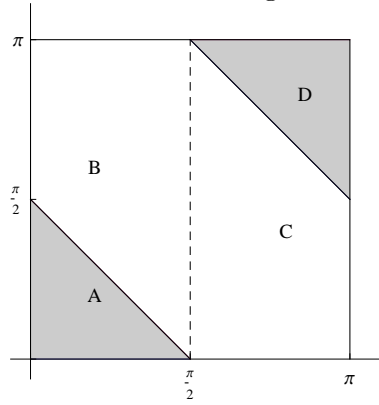
se convierte en producto de integrales simples:

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) dx dy &= \int_0^1 x^2 dx \int_0^1 \frac{1}{1+y^2} dy \\ &= \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 \cdot \arctan y \Big|_0^1 = \frac{\pi}{12}.\end{aligned}$$

- (c) Las integrales son inmediatas si integramos en primer lugar respecto a la variable x :

$$\begin{aligned}\iint_R f(x, y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_0^1 y e^{xy} dx = \int_0^1 (e^{xy} \Big|_0^1) dy \\ &= \int_0^1 (e^y - 1) dy = (e^y - y) \Big|_0^1 = e - 2.\end{aligned}$$

- (d) Para poder integrar la función valor absoluto, debemos dividir la región de integración como se indica en la figura.



Si $(x, y) \in A \cup D$, entonces $\cos(x+y) \geq 0$ y, si $(x, y) \in B \cup C$, entonces $\cos(x+y) \leq 0$. Resulta entonces:

$$\begin{aligned}\iint_R f &= \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2-x} \cos(x+y) dy - \int_0^{\pi/2} dx \int_{\pi/2-x}^{\pi} \cos(x+y) dy \\ &\quad - \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{3\pi/2-x} \cos(x+y) dy + \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{3\pi/2-x}^{\pi} \cos(x+y) dy \\ &= \int_0^{\pi/2} (\text{sen}(\pi/2) - \text{sen } x) dx - \int_0^{\pi/2} (\text{sen}(x+\pi) - \text{sen}(\pi/2)) dx \\ &\quad - \int_{\pi/2}^{\pi} (\text{sen}(3\pi/2) - \text{sen } x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\text{sen}(x+\pi) - \text{sen}(3\pi/2)) dx \\ &= (2x + \cos x + \cos(x+\pi)) \Big|_0^{\pi/2} + (2x - \cos x - \cos(x+\pi)) \Big|_{\pi/2}^{\pi} = 2\pi.\end{aligned}$$

PROBLEMA 5.2

Si f es continua en $R = [a, b] \times [c, d]$, y se define

$$F(x, y) = \int_a^x du \int_c^y f(u, v) dv,$$

probar que $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = f(x, y)$, para $a < x < b$, $c < y < d$.

Solución

Llamamos $G(x, y)$ a una función tal que

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = f(x, y).$$

De este modo, por el teorema fundamental del cálculo integral,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = G(x, y) - G(x, c).$$

Derivando respecto a la segunda variable,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x, c) = f(x, y).$$

Por otra parte, si intercambiamos el orden de integración podemos escribir

$$F(x, y) = \int_c^y dv \int_a^x f(u, v) du = \int_c^y (H(x, v) - H(a, v)) dy,$$

si H es una función tal que $\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = f(x, y)$.

Procediendo ahora de forma análoga al caso anterior, obtenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = H(x, y) - H(a, y),$$

y, si derivamos respecto a la primera variable,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = f(x, y).$$

PROBLEMA 5.3

Sea $f(x, y) = e^{\text{sen}(x+y)}$ y $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$. Probar que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \iint_D f(x, y) dx dy \leq e.$$

Solución

Calculamos en primer lugar los máximos y mínimos de la función

$$f(x, y) = e^{\text{sen}(x+y)}$$

en el cuadrado $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$.

Para ello resolvemos el sistema

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x+y) \cdot e^{\text{sen}(x+y)} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x+y) \cdot e^{\text{sen}(x+y)} = 0 \end{array} \right\} \implies \cos(x+y) = 0 \implies x+y = \frac{(2k+1)\pi}{2}.$$

Los únicos puntos estacionarios de la función en el cuadrado D son los correspondientes a las rectas $x+y = \pi/2$ y $x+y = 3\pi/2$. Como los valores de la función en dichos puntos son e y $1/e$, respectivamente, deducimos que

$$\max\{f(x, y) : (x, y) \in D\} = e, \quad \min\{f(x, y) : (x, y) \in D\} = 1/e.$$

De la desigualdad $1/e \leq f(x, y) \leq e$, concluimos que

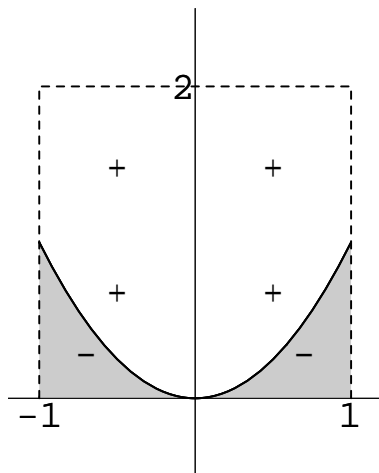
$$\begin{aligned} \iint_D \frac{1}{e} dx dy &\leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D e dx dy \\ \implies \frac{4\pi^2}{e} &\leq \iint_D f(x, y) dx dy \leq 4e\pi^2. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.4

Hallar $I = \int_{-1}^1 dx \int_0^2 \sqrt{|y-x^2|} dy$.

Solución

Dividamos el cuadrado $[-1, 1] \times [0, 2]$ en dos regiones (ver figura) separadas por la parábola $y = x^2$.



La integral buscada se descompone así en:

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2} dy = I_1 + I_2.$$

Calculamos por separado ambas integrales:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-1}^1 -dx \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y} dy = - \int_{-1}^1 \frac{(x^2 - y)^{3/2}}{3/2} \Big|_0^{x^2} dx = \int_{-1}^1 -\frac{2x^3}{3} dx = 0. \\ rI_2 &= \int_{-1}^1 \frac{(y - x^2)^{3/2}}{3/2} \Big|_{x^2}^2 dx = \int_{-1}^1 (2/3) \sqrt{(2 - x^2)^3} dx \\ &= (\text{sustitución } x = \sqrt{2} \cos t) = \frac{2}{3} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1 - \cos 2t) dt = \frac{\pi - 2}{3}. \end{aligned}$$

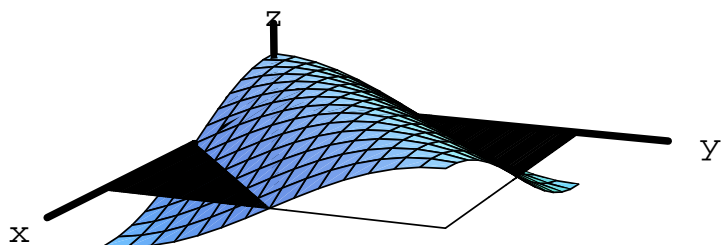
El valor de la integral es entonces $I = \frac{\pi - 2}{3}$.

PROBLEMA 5.5

Calcular el volumen del sólido limitado por la función $z = \cos(x - y)$ y el plano $z = 0$, encerrada en el cuadrado $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

Solución

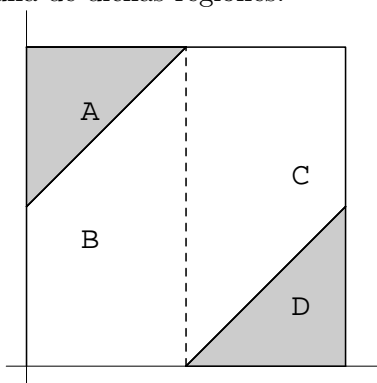
En la figura se muestra la gráfica de la función donde observamos que toma valores positivos y negativos.



En efecto, si $(x, y) \in [0, \pi] \times [0, \pi]$,

$$\cos(x - y) > 0 \iff -\frac{\pi}{2} < x - y < \frac{\pi}{2} \iff x - \frac{\pi}{2} < y < x + \frac{\pi}{2}.$$

Por tanto, debemos descomponemos el cuadrado S en las regiones A , B , C y D , como se ilustra en la figura adjunta, y calcular la integral como suma de integrales en cada una de dichas regiones.



Así pues:

$$\begin{aligned}
V &= \iint_S |\cos(x-y)| \, dx dy \\
&= \iint_A -\cos(x-y) \, dx dy + \iint_B \cos(x-y) \, dx dy \\
&\quad + \iint_C \cos(x-y) \, dx dy - \iint_D \cos(x-y) \, dx dy \\
&= -\int_0^{\pi/2} dx \int_{x+\pi/2}^{\pi} \cos(x-y) \, dy + \int_0^{\pi/2} dx \int_0^{x+\pi/2} \cos(x-y) \, dy \\
&\quad + \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_{x-\pi/2}^{\pi} \cos(x-y) \, dy - \int_{\pi/2}^{\pi} dx \int_0^{x-\pi/2} \cos(x-y) \, dy \\
&= \int_0^{\pi/2} (\text{sen}(x-\pi) - \text{sen}(-\pi/2)) \, dx - \int_0^{\pi/2} (\text{sen}(-\pi/2) - \text{sen } x) \, dx \\
&\quad - \int_{\pi/2}^{\pi} (\text{sen}(x-\pi) - \text{sen}(\pi/2)) \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\text{sen}(\pi/2) - \text{sen } x) \, dx = 2\pi.
\end{aligned}$$

2. INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES GENERALES.

En este curso se estudian las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, es decir, funciones definidas sobre el espacio euclídeo de dimensión n

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\},$$

y con imagen en el espacio análogo de dimensión m , \mathbb{R}^m .

PROBLEMA 5.6

En la integral doble $\iint_D f(x, y) dx dy$, colocar los límites de integración en ambos órdenes, para los siguientes recintos:

- i) trapecio de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 2)$ y $(0, 1)$.
- ii) segmento parabólico $y = x^2$, $y = 1$.
- iii) círculo $x^2 + y^2 \leq 1$.
- iv) círculo $x^2 + y^2 \leq y$.

Solución

Si dibujamos las gráficas y despejamos cada una de las variables con respecto a la otra, tenemos:

$$\text{i) } I = \int_0^1 dx \int_0^{x+1} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_0^1 f(x, y) dx + \int_1^2 dy \int_{y-1}^1 f(x, y) dx.$$

$$\text{ii) } I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx.$$

$$\text{iii) } I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

$$\text{iv) } I = \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{(1-\sqrt{1-4x^2})/2}^{(1+\sqrt{1-4x^2})/2} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x, y) dx.$$

PROBLEMA 5.7

Cambiar el orden de integración en las integrales siguientes:

a) $\int_0^3 dx \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy.$

b) $\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x, y) dy.$

c) $\int_1^2 dx \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy.$

d) $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy.$

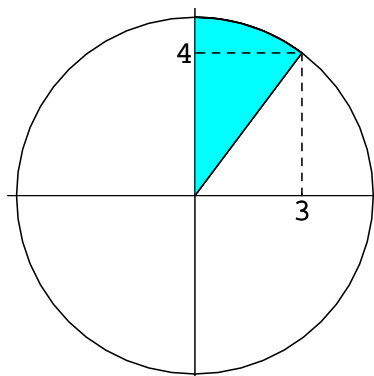
e) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy, \quad a > 0.$

f) $\int_1^2 dx \int_x^{x^3} f(x, y) dy + \int_2^8 dx \int_x^8 f(x, y) dy.$

Solución

a) La región de integración, indicada en la figura, es la que verifica el sistema

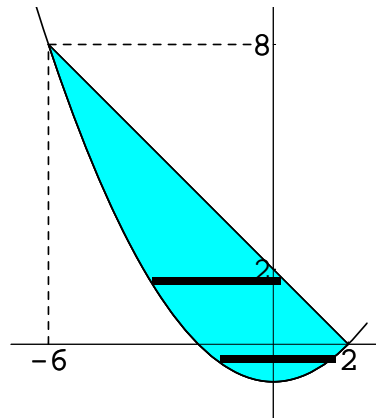
$$0 \leq x \leq 3, \quad 4x/3 \leq y \leq \sqrt{25-x^2}.$$



Como el punto $(3, 4)$ es la intersección entre la circunferencia y la recta, la nueva integral se escribirá como

$$\int_0^3 dx \int_{4x/3}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy = \int_0^4 dy \int_0^{3y/4} f(x, y) dx + \int_4^5 dy \int_0^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx.$$

b) Se trata de la región comprendida entre la parábola $y = x^2/4 - 1$ y la recta $y = 2 - x$.



Al invertir el orden de integración, la integral se descompone así:

$$I = \int_{-1}^0 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x, y) dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x, y) dx.$$

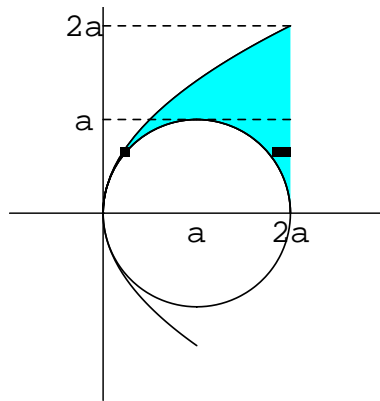
c) La región de integración es el segmento de circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$ limitado por la recta $x + y = 2$. La integral se puede escribir como:

$$I = \int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx.$$

d) Para invertir el orden de integración, basta despejar x en la ecuación $y = \ln x$. Tenemos así:

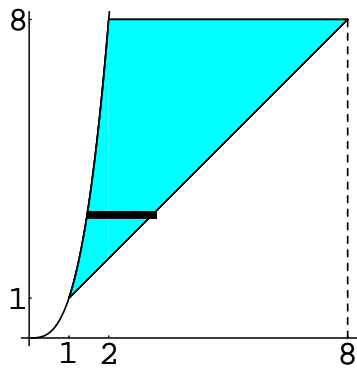
$$I = \int_0^1 dy \int_{e^y}^e f(x, y) dx.$$

e) Si observamos la región de integración, al cambiar el orden de integración debemos descomponer la integral en tres sumandos:



$$I = \int_0^a dy \int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f dx + \int_0^a \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f dx + \int_a^{2a} dy \int_{y^2/2a}^{2a} f dx.$$

f) La suma de las dos integrales dadas origina la región dada por la figura.



Al cambiar el orden de integración, queda sencillamente:

$$I = \int_1^8 dy \int_{y^{1/3}}^y f(x, y) dx.$$

PROBLEMA 5.8

Calcular las siguientes integrales:

$$(a) \int_1^2 dx \int_{2x}^{3x+1} xy \, dy.$$

$$(b) \int_{-1}^1 dx \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} \, dy.$$

$$(c) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dy.$$

$$(d) \int_{-1}^1 dy \int_{|y|}^1 (x+y)^2 \, dx.$$

$$(e) \int_0^8 dy \int_{y/4}^{\sqrt[3]{y}} e^{x^2} \, dx.$$

Solución

(a) Basta resolver directamente las integrales iteradas para obtener:

$$\begin{aligned} \int_1^2 dx \int_{2x}^{3x+1} xy \, dy &= \int_1^2 \frac{xy^2}{2} \Big|_{2x}^{3x+1} dx = \int_1^2 \left(\frac{x(3x+1)^2}{2} - \frac{x(2x)^2}{2} \right) dx \\ &= \int_1^2 \frac{5x^3 + 6x^2 + x}{2} dx = \left(\frac{5x^4}{8} + x^3 + \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^2 = \frac{137}{8}. \end{aligned}$$

(b) Calculamos primero la integral respecto a la variable y :

$$\int_{-1}^1 dx \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} \, dy = \int_{-1}^1 e^{x+y} \Big|_{-2|x|}^{|x|} dx = \int_{-1}^1 (e^{x+|x|} - e^{x-2|x|}) \, dx.$$

Ahora descomponemos la integral simple en suma de dos integrales para

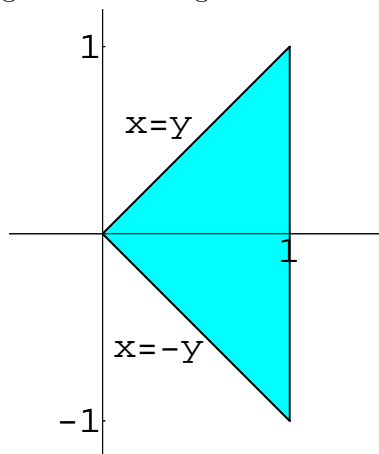
sustituir el valor absoluto:

$$\begin{aligned}
 \int_{-1}^1 (e^{x+|x|} - e^{x-2|x|}) dx &= \int_{-1}^0 (1 - e^{3x}) dx + \int_0^1 (e^{2x} - e^{-x}) dx \\
 &= \left(x - \frac{1}{3} e^{3x} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{1}{2} e^{2x} + e^{-x} \right) \Big|_0^1 \\
 &= -\frac{5}{6} + \frac{1}{3} e^{-3} + \frac{1}{2} e^2 + e^{-1}.
 \end{aligned}$$

(c) Integramos primero respecto a y para lo cual hacemos el cambio de variable $\sin t = y/\sqrt{1-x^2}$. De este modo:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} dy &= \int_0^1 dx \int_0^{\pi/2} (\sqrt{1-x^2})^2 \cdot \cos^2 t dt \\
 &= \int_0^1 (1-x^2) \cdot \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} dx \\
 &= \frac{\pi}{4} \int_0^1 (1-x^2) dx = \frac{\pi}{4} \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

(d) El dominio de integración es la región ilustrada en la figura.

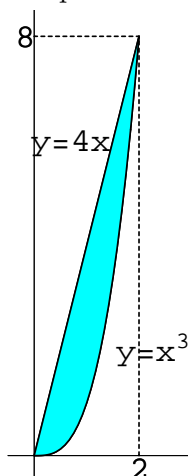


Integramos primero respecto a y y después descomponemos el intervalo

$[-1, 1]$ en dos subintervalos para calcular la integral respecto a x :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-1}^1 \left(\frac{x^3}{3} + x^2 y + x y^2 \right) \Big|_{|y|}^1 dy \\
 &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} + y + y^2 - \frac{|y|^3}{3} - y^3 - |y| \cdot y^2 \right) dy \\
 &= \int_{-1}^0 \left(\frac{1}{3} + y + y^2 + \frac{y^3}{3} \right) dy + \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y + y^2 - \frac{7y^3}{3} \right) dy \\
 &= \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{12} \right) \Big|_{-1}^0 + \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{7y^4}{12} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.
 \end{aligned}$$

(e) La región de integración es la que se ilustra en la figura adjunta.



Intercambiando el orden de integración se obtiene

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 dx \int_{x^3}^{4x} e^{x^2} dy = \int_0^2 (4x e^{x^2} - x^3 e^{x^2}) dx \\
 &= 2e^{x^2} \Big|_0^2 - \frac{x^2}{2} e^{x^2} \Big|_0^2 + \int_0^2 x e^{x^2} dx = \frac{e^4}{2} - \frac{5}{2}.
 \end{aligned}$$

(Aplicar el método de integración por partes en la segunda integral.)

PROBLEMA 5.9

Calcular $\iint_D f(x, y) dx dy$ en los siguientes casos:

i) $f(x, y) = xy^2$, D el recinto limitado por $y^2 = 2px$ y $x = p/2$ ($p > 0$).

ii) $f(x, y) = x^2 + y^2$, D el paralelogramo limitado por $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 3a$.

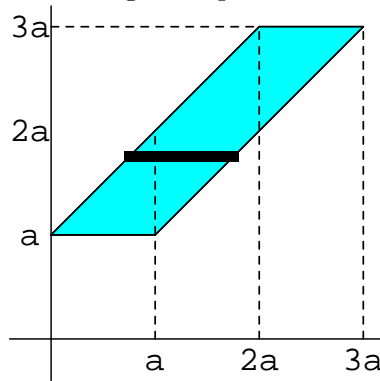
iii) $f(x, y) = x + y$, D está limitado por $y^2 = 2x$, $x + y = 4$, $x + y = 12$.

Solución

i) Escribimos la integral doble en forma de integrales iteradas y resulta:

$$I = \int_0^{p/2} dx \int_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} xy^2 dy = \int_0^{p/2} x \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-\sqrt{2px}}^{\sqrt{2px}} dx = \frac{1}{3} \int_0^{p/2} 2x(2px)^{3/2} dx = \frac{p^5}{21}.$$

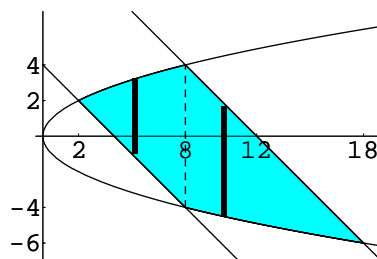
ii) Si observamos el paralelogramo de la figura, observamos que es más conveniente realizar primero la integral respecto a x .



Así,

$$I = \int_a^{3a} dy \int_{y-a}^y (x^2 + y^2) dx = \int_a^{3a} \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{y-a}^y dy = \dots = 14a^4.$$

iii) Teniendo en cuenta la forma de la región de integración, si integramos primero respecto a y , la integral se descompone en dos sumandos.



Así pues,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_2^8 dx \int_{4-x}^{\sqrt{2x}} (x+y) dy + \int_8^{18} dx \int_{-\sqrt{2x}}^{12-x} (x+y) dy \\
 &= \int_2^8 \left(\sqrt{2} \cdot x^{3/2} - 3x + x^2 - \frac{(4-x)^2}{2} \right) dx \\
 &\quad + \int_8^{18} \left(11x - x^2 + \frac{(12-x)^2}{2} + \sqrt{2} \cdot x^{3/2} \right) dx = \frac{8156}{15}.
 \end{aligned}$$

Otra posibilidad sería restar la integral sobre la región comprendida entre la parábola y la recta $x + y = 12$ y la integral sobre la región comprendida entre la parábola y la recta $x + y = 4$.

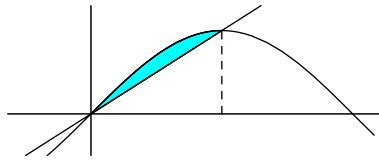
PROBLEMA 5.10

Calcular $\iint_D f(x, y) dx dy$ en los siguientes casos:

- i) $f(x, y) = y$, $D = \{(x, y) : 0 \leq 2x/\pi \leq y \leq \sin x\}$.
- ii) $f(x, y) = x^2 + y^2$, D recinto limitado por $y = x^2$, $x = 2$, $y = 1$.
- iii) $f(x, y) = x^2 y$, D es el primer cuadrante del círculo $x^2 + y^2 \leq 4$.
- iv) $f(x, y) = y$, $D = \{(x, y) : y > 0, x^2 + y^2 \leq a^2, y^2 \geq 2ax, x \geq 0\}$.

Solución

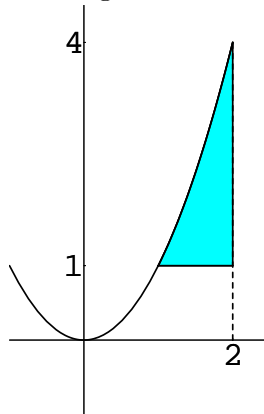
- i) Los puntos de intersección de las curvas $y = \sin x$, $y = 2x/\pi$ son $(0, 0)$ y $(\pi/2, 1)$.



La integral se calcula entonces de forma directa:

$$I = \int_0^{\pi/2} dx \int_{2x/\pi}^{\sin x} y \, dy = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x - (2x/\pi)^2}{2} dx = \frac{\pi}{24}.$$

ii) La figura adjunta muestra la región dada.



Para calcular la integral podemos seguir dos métodos:

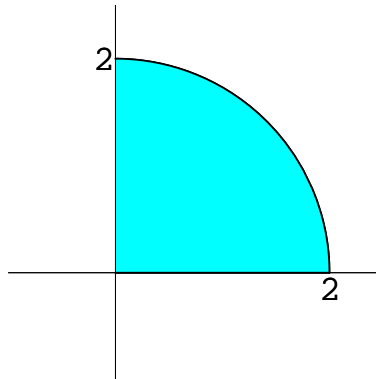
1) Integrando como región de tipo 1.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dx \int_1^{x^2} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_1^2 (x^2 y + y^3/3) \Big|_1^{x^2} dx = \int_1^2 (x^4 + x^6/3 - x^2 - 1/3) dx = \frac{1006}{105}. \end{aligned}$$

2) Integrando como región de tipo 2.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 (x^2 + y^2) dx \\ &= \int_1^4 (x^3/3 + xy^2) \Big|_{\sqrt{y}}^2 dy = \int_1^4 (8/3 + 2y^2 - y^{3/2}/3 - y^{5/2}) dy = \frac{1006}{105}. \end{aligned}$$

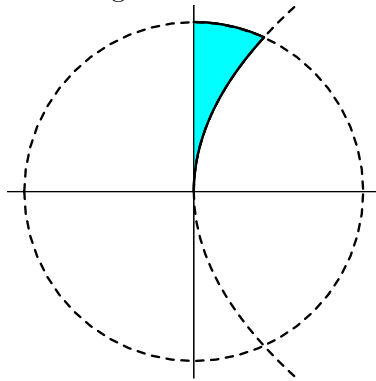
iii) A partir de la figura adjunta obtenemos los límites de integración.



De este modo, la integral se expresa como:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 x^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y dy = \int_0^2 x^2 y^2/2 \Big|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{3} x^3 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^2 = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

iv) La intersección de $x^2 + y^2 = a^2$ con $y^2 = 2ax$ da $x = a(\sqrt{2} - 1)$, y el recinto S es el indicado en la figura.



Teniendo en cuenta la figura, la integral se escribe como

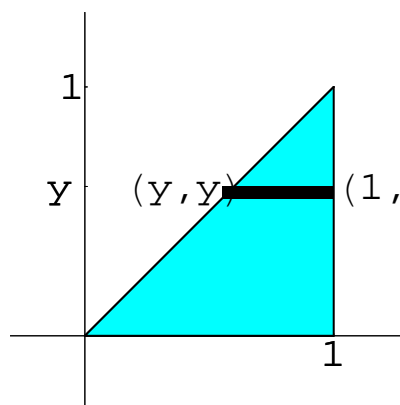
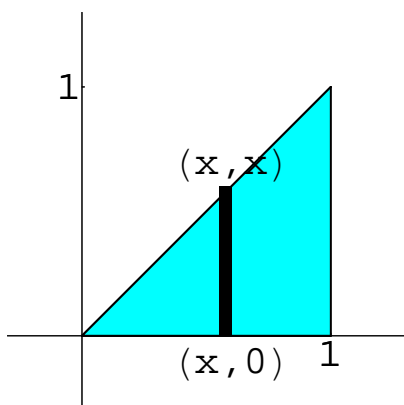
$$I = \int_0^{a(\sqrt{2}-1)} dx \int_{\sqrt{2ax}}^{\sqrt{a^2-x^2}} y dy = \frac{1}{2} \int_0^{a(\sqrt{2}-1)} (a^2 - x^2 - 2ax) dx = \frac{a^3}{6} (4\sqrt{2} - 5).$$

PROBLEMA 5.11

Si llamamos $A = \int_0^1 e^{-t^2} dt$ e $I = 2 \int_0^1 dx \int_0^x e^{-y^2} dy$, probar que $I = 2A + e^{-1} - 1$.

Solución

La región de integración es el triángulo de la figura.



Intercambiando el orden de integración en I , tenemos:

$$\begin{aligned}
 I &= 2 \int_0^1 dy \int_y^1 e^{-y^2} dx = 2 \int_0^1 (e^{-y^2} x) \Big|_y^1 dy \\
 &= 2 \int_0^1 (e^{-y^2} - ye^{-y^2}) dy = 2 \int_0^1 e^{-y^2} dy + \int_0^1 -2ye^{-y^2} dy \\
 &= 2A + e^{-y^2} \Big|_0^1 = 2A + e^{-1} - e^0.
 \end{aligned}$$

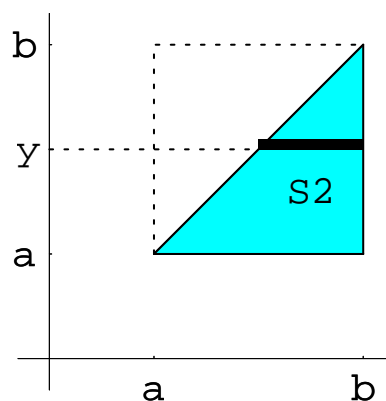
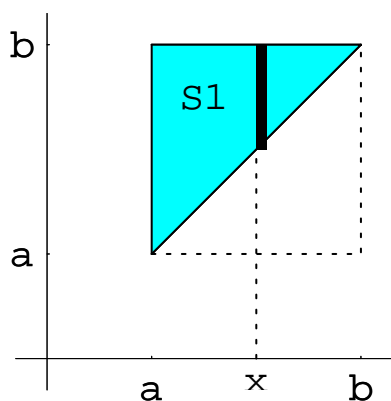
PROBLEMA 5.12

Probar que $2 \int_a^b dx \int_x^b f(x)f(y) dy = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2$.

Solución

Por una parte,

$$I = \left(\int_a^b f(x) dx \right)^2 = \left(\int_a^b f(x) dx \right) \cdot \left(\int_a^b f(x) dx \right) = \int_a^b \int_a^b f(x)f(y) dx dy.$$



Descomponiendo el cuadrado en dos triángulos como indica la figura, resulta:

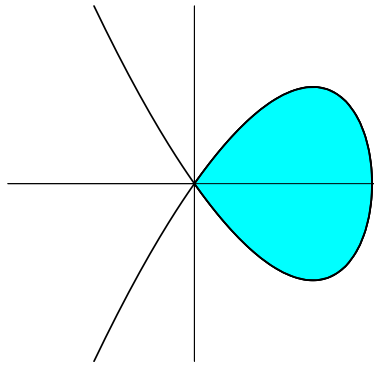
$$\begin{aligned} I &= \iint_{S_1} f(x)f(y) dx dy + \iint_{S_2} f(x)f(y) dx dy \\ &= \int_a^b dx \int_x^b f(x)f(y) dy + \int_a^b dy \int_y^b f(x)f(y) dx = 2 \int_a^b dx \int_x^b f(x)f(y) dy, \end{aligned}$$

pues en el segundo sumando se pueden intercambiar las letras x e y .

PROBLEMA 5.13

Hallar el área limitada por el lazo de $y^2 = x^2(2 - x)$.

Solución



Observando la figura se obtiene directamente:

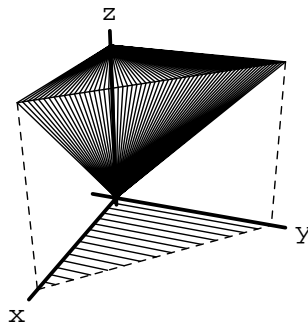
$$\begin{aligned}
 A &= 2 \int_0^2 dx \int_0^{x\sqrt{2-x}} dy = 2 \int_0^2 x\sqrt{2-x} dx = (\text{sustitución } 2-x = z^2) \\
 &= -4 \int_{\sqrt{2}}^0 (2z^2 - z^4) dz = \frac{32\sqrt{2}}{15}.
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.14

Hallar el volumen de la región limitada por los planos $z = x + y$, $z = 6$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Solución

La región dada es el tetraedro de la figura.



Si observamos que, cuando x varía entre 0 y 6, y varía entre 0 y $z - x$, con $z = 6$, el volumen buscado es:

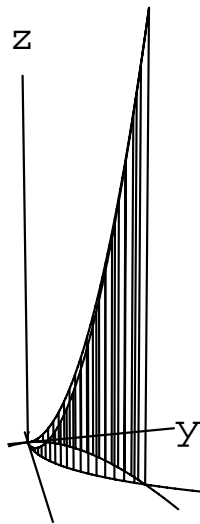
$$V = \int_0^6 dx \int_0^{6-x} [6-(x+y)] dy = \int_0^6 (6-x)y - \frac{y^2}{2} \Big|_0^{6-x} dx = \int_0^6 \frac{(6-x)^2}{2} dx = 36.$$

PROBLEMA 5.15

Hallar el volumen del sólido limitado por el paraboloide $x^2 + 4y^2 = z$, el plano $z = 0$ y los cilindros $y^2 = x$, $x^2 = y$.

Solución

La proyección de la figura sobre el plano $z = 0$ es la región limitada por las parábolas $y^2 = x$, $x^2 = y$. Así pues, cuando x varía entre 0 y 1, y varía entre x^2 y \sqrt{x} .



El volumen queda ahora

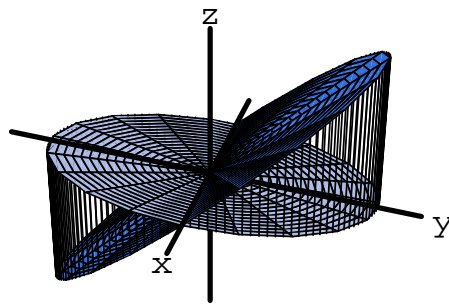
$$V = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + 4y^2) dy = \int_0^1 (x^{5/2} + \frac{4}{3}x^{3/2} - x^4 - \frac{4}{3}x^6) dx = \frac{3}{7}.$$

PROBLEMA 5.16

Hallar el volumen de la porción del cilindro $4x^2 + y^2 = a^2$ comprendida entre los planos $z = 0$ y $z = my$.

Solución

En primer lugar, observamos que el sólido es simétrico respecto a la recta $y = z = 0$. Por otra parte, la base del sólido es la elipse $4x^2 + y^2 = a^2$, de modo que, cuando x varía entre $-a/2$ y $a/2$, y varía entre 0 y $\sqrt{a^2 - 4x^2}$.



Teniendo en cuenta lo anterior, el volumen queda:

$$V = 2 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_0^{\sqrt{a^2 - 4x^2}} my \, dy = m \int_{-a/2}^{a/2} (a^2 - 4x^2) \, dx = \frac{2ma^3}{3}.$$

3. CAMBIO DE VARIABLES EN LA INTEGRAL DOBLE.

En este apartado vamos a generalizar la fórmula

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx = \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

al caso de funciones de n variables. Como la región de integración ya no será un simple intervalo, necesitamos estudiar cómo se transforman regiones en \mathbb{R}^n mediante cambios de variable.

En primer lugar, observaremos que las imágenes de conjuntos con contenido bajo funciones de clase $C^{(1)}$ tienen tamaño comparable a los de los conjuntos originales.

Lema 1. Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n y $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en Ω . Sea A un conjunto acotado, con $\overline{A} \subset \Omega$. Entonces existen un abierto acotado Ω_1 , con $\overline{A} \subset \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega$, y una constante $M > 0$ tales que, si $A \subset \bigcup_{j=1}^p I_j$, donde I_j son n -cubos cerrados de Ω_1 con $\sum_{j=1}^p c(I_j) \leq \alpha$, entonces $\varphi(A) \subset \bigcup_{k=1}^m J_k$, donde J_k son n -cubos cerrados y $\sum_{k=1}^m c(J_k) \leq M \cdot \alpha$.

Demostración. Definimos en primer lugar

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{si } \Omega = \mathbb{R}^n \\ \frac{1}{2} \inf \{ \|a - x\| : a \in \overline{A}, x \notin \Omega \} & \text{si } \Omega \neq \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad \text{Como } \overline{A} \text{ es compacto, } \delta > 0.$$

Sea ahora $\Omega_1 = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - a\| < \delta, \text{ para algún } a \in A\}$. Así, Ω_1 es abierto y acotado. Además $\overline{A} \subset \Omega_1$ y $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$.

Como $\varphi \in C^{(1)}(\Omega)$ y $\overline{\Omega_1}$ es compacto, existe $M_0 = \sup\{\|D\varphi(x)\| : x \in \Omega_1\} < \infty$.

Si $A \subset \bigcup_{j=1}^p I_j$, entonces $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq M_0 \|x - y\|$, $\forall x, y \in I_j$.

Si las aristas de I_j miden $2r_j$ y x es el centro de I_j , $\forall y \in I_j$, $\|x - y\| \leq \sqrt{n} \cdot r_j$, de donde $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \leq \sqrt{n} \cdot M_0 \cdot r_j$, es decir $\varphi(I_j)$ está contenido en un n -cubo de lado $2M_0 r_j$. Por lo tanto, $\varphi(A) \subset \bigcup J_k$, con $\sum c(J_k) \leq M \cdot \alpha$. \square

Como consecuencia inmediata tenemos el siguiente resultado.

Corolario 1. Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n y $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en Ω . Sea A un conjunto acotado, con $\overline{A} \subset \Omega$. Si A tiene contenido cero, entonces $\varphi(A)$ tiene contenido cero.

También podemos concluir fácilmente que la imagen de un conjunto acotado de dimensión menor a la del espacio tiene contenido cero.

Corolario 2. Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^r ($r < n$) y $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en Ω . Si A es un conjunto acotado, con $\overline{A} \subset \Omega$, entonces $\psi(A)$ tiene contenido cero.

Demostración. Si llamamos $\Omega_0 = \Omega \times \mathbb{R}^{n-r}$, entonces Ω_0 es abierto en \mathbb{R}^n .

Si definimos $\varphi : \Omega_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \psi(x_1, \dots, x_r)$, entonces $\varphi \in C^{(1)}(\Omega_0)$.

Sea ahora $A_0 = A \times \{0, \dots, 0\}$. Entonces $\overline{A_0} \subset \Omega_0$ y A_0 tiene contenido cero en \mathbb{R}^n . Entonces $\psi(A) = \varphi(A_0)$ tiene contenido cero en \mathbb{R}^n . \square

Con este resultado sabemos que, si A es un conjunto con contenido y $\varphi \in C^{(1)}(\Omega)$, con $\overline{A} \subset \Omega$, entonces $\varphi(\text{fr}(A))$ tiene contenido cero. Queremos también que $\text{fr}(\varphi(A))$ tenga contenido cero y estudiaremos a continuación cuándo ocurre.

Lema 2. Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n y $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase $C^{(1)}$ en Ω . Si A es un conjunto con contenido, $\overline{A} \subset \Omega$ y $J_\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \bigcap(A)$, entonces $\varphi(A)$ tiene contenido.

Demostración. Como \overline{A} es compacto y φ es continua, entonces $\varphi(\overline{A})$ es compacto, con lo que $\varphi(A)$ es acotado.

Si probamos que $\text{fr} \varphi(A) \subset \varphi(\text{fr}(A))$ y que $\varphi(\text{fr}(A))$ tiene contenido cero, tendremos que $\text{fr} \varphi(A)$ tiene contenido cero, lo que significa que $\varphi(A)$ tiene contenido.

Por una parte, como $\varphi(\overline{A})$ es compacto, $\text{fr}(\varphi(A)) \subset \varphi(\overline{A}) = \varphi(\bigcap(A) \cup \text{fr}(A))$. Así pues, si $y \in \text{fr}(\varphi(A))$, existe $x \in \bigcap(A) \cup \text{fr}(A)$ tal que $y = \varphi(x)$.

Si estuviera x en el interior de A , por hipótesis $J_\varphi(x) \neq 0$, con lo que $y = \varphi(x)$ sería un punto interior de $\varphi(\bigcap(A))$ y también un punto interior de $\varphi(A)$, lo que contradice la suposición dada.

Obtenemos así que $\text{fr}(\varphi(A)) \subset \varphi(\text{fr}(A))$.

Por otra parte, como A tiene contenido, $\text{fr}(A) \subset \Omega$ es cerrado y tiene contenido cero, de donde $\varphi(\text{fr}(A))$ tiene contenido cero. \square

Corolario. Sea Ω un abierto en \mathbb{R}^n y $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función inyectiva y de clase $C^{(1)}$ en Ω . Si A tiene contenido, $\overline{A} \subset \Omega$ y $J_\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \bigcap(A)$, entonces $\text{fr}(\varphi(A)) = \varphi(\text{fr}(A))$.

Demostración. Basta probar que $\varphi(\text{fr}(A)) \subset \text{fr}(\varphi(A))$. Para ello, sea $x \in \text{fr}(A)$. Existen dos sucesiones $(x_n) \subset A$, $(y_n) \subset \Omega \setminus A$ que convergen a x . Como φ es continua, las sucesiones $(\varphi(x_n))$ y $(\varphi(y_n))$ convergen a $\varphi(x)$. Como φ es inyectiva, $\varphi(y_n) \notin \varphi(A)$, de modo que $\varphi(x) \in \text{fr}(\varphi(A))$. \square

Transformaciones lineales.

Veremos a continuación que conjuntos con contenido se transforman mediante aplicaciones lineales en conjuntos con contenido, y dicho contenido es un múltiplo del original. Además este múltiplo es el valor absoluto del determinante de la aplicación.

Teorema. Sea $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal. Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto con contenido, entonces $c(L(A)) = |\det L| \cdot c(A)$.

Demostración. Si L es singular, $\det L = 0$ y la imagen $R(L) \neq \mathbb{R}^n$. Esto indica que $R(L)$ es la imagen de alguna aplicación $L' : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $k < n$. Por tanto, $c(L(A)) = 0$.

Si L no es singular, $\det L \neq 0$. Como A tiene contenido, $L(A)$ tiene contenido. Para cada conjunto con contenido, definimos la aplicación $\lambda(A) = c(L(A))$. Dicha aplicación tiene las siguientes propiedades elementales:

- i) $\lambda(A) \geq 0$, $\forall A$.
- ii) $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ si $A \cap B = \emptyset$.
- iii) $\lambda(x + A) = \lambda(A)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- iv) Si $A \subset B$, entonces $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.

Si llamamos $K_0 = [0, 1]^n$ al n -cubo unidad y $m_L = \lambda(K_0)$, las propiedades anteriores permiten probar que $\lambda(A) = m_L \cdot c(A)$, para todo conjunto acotado $A \subset \mathbb{R}^n$.

Por otra parte, si M es otra aplicación lineal no singular, entonces

$$m_{L \circ M} \cdot c(A) = c((L \circ M)(A)) = c(L(M(A))) = m_L \cdot c(M(A)) = m_L \cdot m_M \cdot c(A).$$

Teniendo en cuenta que toda aplicación lineal no singular es composición (más o menos iterada) de dos tipos especiales:

- a) $L_1(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (x_1, \dots, \alpha x_i, \dots, x_n)$,

b) $L_2(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_j, \dots, x_n),$

basta probar que $m_L = |\det L|$ en estos casos para que la propiedad sea cierta en el caso general.

a) Si $\alpha > 0$, $L_1(K_0) = [0, 1) \times \dots \times [0, \alpha) \times \dots \times [0, 1)$, de donde $\alpha = c(L_1(K_0)) = m_{L_1} \cdot c(K_0) = m_{L_1}$.

Si $\alpha < 0$, $L_1(K_0) = [0, 1) \times \dots \times (\alpha, 0] \times \dots \times [0, 1)$, de donde $-\alpha = c(L_1(K_0)) = m_{L_1} \cdot c(K_0) = m_{L_1}$.

De cualquier manera, $|\alpha| = m_{L_1} = |\det L_1|$.

b) Sean $\Delta_1 = \{(x_1, \dots, x_n) \in K_0 : x_i < x_j\}$ y $\Delta_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in K_0 : x_i \geq x_j\}$. De este modo, $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ y $K_0 = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Además $L_2(K_0) = \Delta_2 \cup \{(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) + \Delta_1\}$.

Por tanto, $c(L_2(K_0)) = c(\Delta_2) + c(\{(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0) + \Delta_1\}) = c(\Delta_2) + c(\Delta_1) = c(K_0)$, de donde $m_{L_2} = 1 = |\det L_2|$.

□

Transformaciones no lineales.

Lema. Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un n -cubo cerrado con centro el origen. Sea Ω un abierto que contiene a K . Sea $\psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función inyectiva y de clase $C^{(1)}$ en Ω . Supongamos que $J_\psi(x) \neq 0$, $\forall x \in K$ y $\|\psi(x) - x\| \leq \alpha\|x\|$, $\forall x \in K$, donde $0 < \alpha < 1/\sqrt{n}$. Entonces

$$(1 - \alpha\sqrt{n})^n \leq \frac{c(\psi(K))}{c(K)} \leq (1 + \alpha\sqrt{n})^n.$$

Demostración. Como K tiene contenido, $\psi(K)$ tiene contenido. Además $\partial(\psi(K)) = \psi(\partial K)$.

Si los lados de K tienen longitud $2r$ y $x \in \partial K$, entonces $r \leq \|x\| \leq r\sqrt{n}$. Por hipótesis, deducimos que $\|\psi(x) - x\| \leq \alpha\|x\| \leq \alpha \cdot r \cdot \sqrt{n}$. Por tanto, el conjunto $\psi(\partial K)$ no intersecta un cubo abierto C_i de centro O y lados de longitud $2(1 - \alpha\sqrt{n}) \cdot r$.

Si llamamos $A = \bigcap \psi(K)$, $B = \text{ext } \psi(K)$, A y B son abiertos, disjuntos, no vacíos con $A \cup B = \mathbb{R}^n \setminus \partial(\psi(K))$.

Como C_i es conexo, $C_i \subset A$ ó $C_i \subset B$. Pero $O \in C_i \cap A$, de donde $C_i \subset A \subset \psi(K)$.

Análogamente se prueba que, si C_0 es el cubo cerrado de centro el origen y lados $2(1 + \alpha\sqrt{n})r$, entonces $\psi(K) \subset C_0$.

□

Teorema. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C(1)(\Omega)$, φ inyectiva, $J_\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$. Si A tiene contenido y $\bar{A} \subset \Omega$, dado $\varepsilon \in (0, 1)$, existe $\gamma > 0$ tal que, si K es un n -cubo cerrado de centro $x \in A$ y lados de longitud menor que 2γ , entonces

$$|J_\varphi(x)| \cdot (1 - \varepsilon)^n \leq \frac{c(\varphi(K))}{c(K)} \leq |J_\varphi(x)| \cdot (1 + \varepsilon)^n.$$

Demostración. En primer lugar, construimos δ y Ω_1 como en el lema 1. Como $\det D\varphi(x) = J_\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$, entonces existe $L_x = (D\varphi(x))^{-1}$ y además $\det L_x = 1/J_\varphi(x)$, $x \in \Omega$.

Como los elementos de la matriz L_x son funciones continuas, por la compacidad de $\overline{\Omega_1}$, existe $M > 0$ tal que $\|L_x\| \leq M$, $\forall x \in \Omega_1$.

Sea $\varepsilon \in (0, 1)$. Por la continuidad uniforme de $D\varphi$ en Ω_1 , existe $\beta \in (0, \delta/2)$ tal que,

$$\|x_1 - x_2\| \leq \beta \implies \|D\varphi(x_1) - D\varphi(x_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}}.$$

Dado $x \in A$, si $\|z\| \leq \beta$, es claro que $x \in \Omega_1$, $x + z \in \Omega_1$. Además,

$$\|\varphi(x+z) - \varphi(x) - D\varphi(x)(z)\| \leq \|z\| \cdot \sup_{0 \leq t \leq 1} \|D\varphi(x+tz) - D\varphi(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}} \cdot \|z\|.$$

Si definimos $\psi(z) = L_x(\varphi(x+z) - \varphi(x))$, de esta desigualdad se deduce:

$$\|\psi(z) - z\| = \|L_x(\varphi(x+z) - \varphi(x) - L_x D\varphi(x)(z))\| \leq \|L_x\| \cdot \frac{\varepsilon}{M\sqrt{n}} \cdot \|z\| \leq \frac{\varepsilon \cdot \|z\|}{\sqrt{n}},$$

si $\|z\| \leq \beta$.

Aplicamos el lema anterior con $\alpha = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Entonces, si K_1 es un cubo cerrado con centro O y contenido en la bola abierta de radio β , entonces

$$(1 - \varepsilon)^n \leq \frac{c(\psi(K_1))}{c(K_1)} \leq (1 + \varepsilon)^n.$$

Por la definición de ψ , si $K = x + K_1$, K es un cubo cerrado de centro x y $c(K) = c(K_1)$. Además

$$c(\psi(K_1)) = |\det L_x| \cdot c(\varphi(x + K_1) - \varphi(x)) = \frac{1}{|J_\varphi(x)|} \cdot c(\varphi(K)).$$

Si los lados de K tienen arista menor que 2γ ($\gamma = \beta/\sqrt{n}$), el teorema se cumple. □

Teorema del cambio de variable.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\varphi \in C^{(1)}(\Omega)$, φ inyectiva, $J_\varphi(x) \neq 0$, $\forall x \in \Omega$. Si A tiene contenido, $\overline{A} \subset \Omega$ y $f : \varphi(A) \rightarrow \mathbb{R}$ es acotada y continua, entonces

$$\int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) \cdot |J_\varphi|.$$

Demostración. Debido a la continuidad de los integrandos, ambas integrales existen. Si hacemos $f = f^+ - f^-$, con $f^+ = \frac{f + |f|}{2}$, $f^- = -\frac{f - |f|}{2}$, por la linealidad de la integral, basta hacer la demostración para funciones no negativas.

Definimos Ω_1 como en el lema 1 y definimos también

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \sup\{\|D\varphi(x)\| : x \in \Omega_1\} \\ M_f &= \sup\{f(y) : y \in \varphi(A)\} \\ M_J &= \sup\{|J_\varphi(x)| : x \in A\} \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon \in (0, 1)$, I un n -intervalo que contiene a A y $\{K_i : i = 1, \dots, M\}$ una partición de I en cuadrados con aristas de longitud menor que 2γ , con γ definido como en el teorema del jacobiano.

Sean $\{K_1, \dots, K_m\}$ los cuadrados completamente contenidos en A , $\{K_{m+1}, \dots, K_p\}$ los que tienen puntos dentro y fuera de A y $\{K_{p+1}, \dots, K_M\}$ los contenidos en el complementario de A .

Como A tiene contenido, se pueden elegir de modo que

$$c(A) \leq \sum_{i=1}^m c(K_i) + \varepsilon, \quad \sum_{i=m+1}^p c(K_i) < \varepsilon.$$

Sea $B = K_1 \cup \dots \cup K_m$; como $c(A \setminus B) = c(A) - c(B) < \varepsilon$, tenemos:

$$\left| \int_A (f \circ \varphi) |J_\varphi| - \int_B (f \circ \varphi) |J_\varphi| \right| = \left| \int_{A \setminus B} (f \circ \varphi) |J_\varphi| \right| \leq M_f \cdot M_J \cdot c(A \setminus B) < M_f \cdot M_J \cdot \varepsilon.$$

Por el lema 1, $c(\varphi(A \setminus B)) \leq K \cdot \varepsilon$, de donde

$$\left| \int_{\varphi(A)} f - \int_{\varphi(B)} f \right| = \left| \int_{\varphi(A \setminus B)} f \right| \leq M_f \cdot K \cdot \varepsilon.$$

Si x_i es el centro de K_i ($i = 1, \dots, m$), por el teorema del jacobiano,

$$|J_\varphi(x_i)| \cdot (1 - \varepsilon)^n \leq \frac{c(\varphi(K_i))}{c(K_i)} \leq |J_\varphi(x_i)| \cdot (1 + \varepsilon)^n.$$

Como $0 < \varepsilon < 1$, $1 - 2^n \cdot \varepsilon \leq (1 - \varepsilon^n)$ y $(1 + \varepsilon^n) \leq 1 + 2^n \cdot \varepsilon$. Por tanto,

$$|c(\varphi(K_i)) - |J_\varphi(x_i)| \cdot c(K_i)| \leq c(K_i) \cdot M_J \cdot 2^n \cdot \varepsilon.$$

Por la continuidad de las funciones sobre el compacto B , podemos suponer que, dado cualquier $y_i \in K_i$,

$$\left| \int_B (f \circ \varphi) |J_\varphi| - \sum_{i=1}^m (f \circ \varphi)(y_i) |J_\varphi(x_i)| \cdot c(K_i) \right| < \varepsilon \cdot c(B).$$

Como φ es inyectiva, dos conjuntos de la familia $\{\varphi(K_i) : i = 1, \dots, m\}$ se intersectan en $\varphi(K_i \cap K_j)$ que tiene contenido cero pues $c(K_i \cap K_j) = 0$.

Como $\varphi(K_i)$ tiene contenido, f es integrable en $\varphi(K_i)$. Entonces

$$\int_{\varphi(B)} f = \sum_{i=1}^m \int_{\varphi(K_i)} f.$$

Como f es acotada y continua en $\varphi(K_i)$, existe $p_i \in \varphi(K_i)$ tal que

$$\int_{\varphi(K_i)} f = f(p_i) \cdot c(\varphi(K_i)), \quad i = 1, \dots, m.$$

Por ser φ inyectiva, existe un único $y_i \in K_i$ tal que $\varphi(y_i) = p_i$. Entonces

$$\int_{\varphi(B)} f = \sum_{i=1}^m (f \circ \varphi)(y_i) \cdot c(\varphi(K_i)).$$

Al ser $(f \circ \varphi)(y_i) \geq 0$, resulta

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m (f \circ \varphi)(y_i) \cdot c(\varphi(K_i)) - \sum_{i=1}^m (f \circ \varphi)(y_i) \cdot |J_\varphi(x_i)| \cdot c(K_i) \\ & \leq M_J 2^n \varepsilon \sum_{i=1}^m (f \circ \varphi)(y_i) \cdot c(K_i) \\ & \leq M_J M_f 2^n \varepsilon \sum_{i=1}^m c(K_i) \leq M_J M_f 2^n c(A) \varepsilon. \end{aligned}$$

Combinando las últimas desigualdades, obtenemos:

$$\left| \int_{\varphi(B)} f - \int_B (f \circ \varphi) |J_\varphi| \right| \leq \varepsilon \cdot c(A) (1 + M_J M_f 2^n).$$

En definitiva,

$$\left| \int_{\varphi(A)} f - \int_A (f \circ \varphi) |J_\varphi| \right| \leq M_f \cdot K \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot c(A) (1 + M_J M_f 2^n) + M_f \cdot M_J \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

□

Ejemplos.

$$1) \iint_A f(x, y) \, dx dy = \iint_{A'} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) r \, dr d\vartheta.$$

$$2) \iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{A'} f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta, z) r \, dr d\vartheta dz.$$

$$3) \iiint_A f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{A'} f(\rho \cos \vartheta \sin \varphi, \rho \sin \vartheta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi \, d\rho d\vartheta d\varphi.$$

$$4) \iint_A f(x + 2y, 2x - 3y) \, dx dy = \iint_{g(A)} \frac{1}{7} f(u, v) r \, du dv, \quad g(x, y) = (x + 2y, 2x - 3y).$$

Ejercicio.

$$(a) \text{ Probar que } \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx dy = \pi.$$

$$(b) \text{ Probar que } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

$$(c) \text{ Probar que } \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|^2} \, dx = \pi^{n/2}.$$

$$(d) \text{ Calcular } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} \, dx \text{ y } \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-tx^2} \, dx \text{ (} t > 0 \text{)}.$$

PROBLEMA 5.17

Sea $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ y se define $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$. Encontrar $D = T(D^*)$. ¿Es T inyectiva?

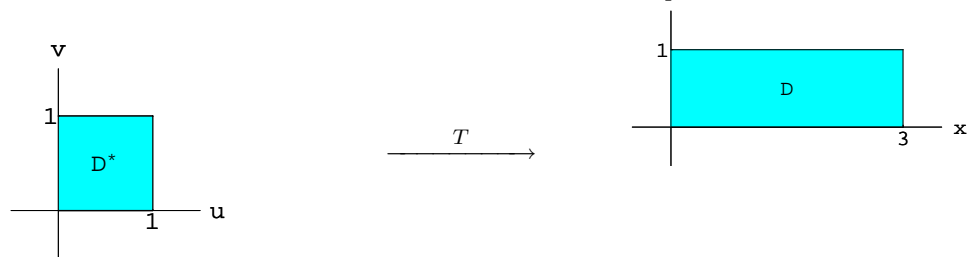
Solución

Cada una de las componentes $x = -u^2 + 4u$, $y = v$, es función de una sola variable. Para ver que T es inyectiva, basta comprobar que lo son cada una de las componentes.

Ahora bien, la función $y = v$ es la identidad, que es evidentemente inyectiva. Además, si $0 \leq v \leq 1$, entonces $0 \leq y \leq 1$.

Por otra parte, la función $x = -u^2 + 4u = -u(u - 4)$ corresponde a una parábola de vértice el punto $(2, 4)$ y que corta al eje u en los puntos $(0, 0)$ y $(4, 0)$. Como el dominio está restringido al intervalo $u \in [0, 1]$, la función es inyectiva y la imagen del intervalo $[0, 1]$ es el intervalo $x \in [0, 3]$.

En la figura siguiente se ilustra el comportamiento de la función T .

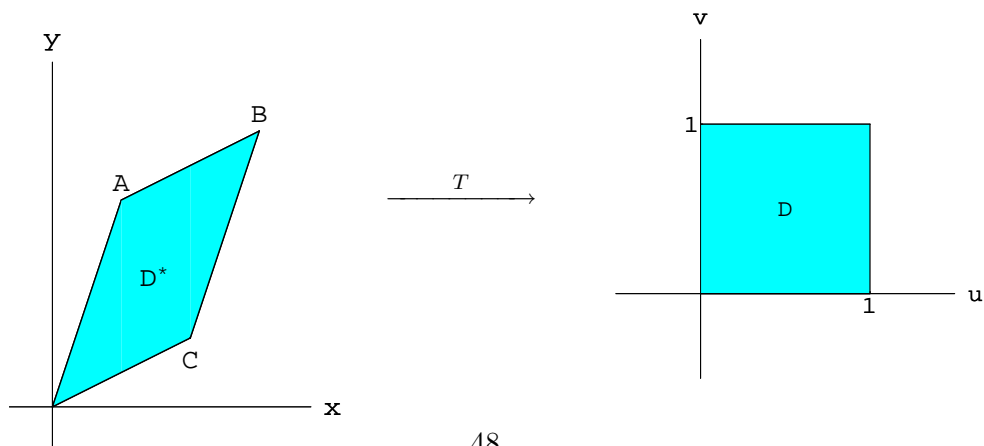


PROBLEMA 5.18

Sea D^* el paralelogramo limitado por las rectas $y = 3x - 4$, $y = 3x$, $y = x/2$, $y = x/2 + 2$. Sea $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Encontrar $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(D^*) = D$.

Solución

En la figura se muestran los paralelogramos D^* y D (donde $A = (4/5, 12/5)$, $B = (12/5, 16/5)$, $C = (8/5, 4/5)$):



Como la aplicación buscada transforma un paralelogramo en otro, debe ser una transformación lineal, del tipo

$$\begin{aligned}u &= ax + by + m \\v &= cx + dy + n.\end{aligned}$$

Debido a que ambos paralelogramos pasan por el origen, podemos hacer $T(0,0) = (0,0)$, de modo que $m = n = 0$.

Teniendo en cuenta que los vértices de un paralelogramo se aplican en los vértices del otro, podemos establecer las relaciones:

$$\begin{aligned}T(8/5, 4/5) = (1, 0) &\implies \begin{cases} 8a/5 + 4b/5 = 1 \\ 8c/5 + 4d/5 = 0 \end{cases} \\T(12/5, 16/5) = (1, 1) &\implies \begin{cases} 12a/5 + 16b/5 = 1 \\ 12c/5 + 16d/5 = 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Resolviendo el sistema resultante, se obtienen los valores $a = 3/4$, $b = -1/4$, $c = -1/4$ y $d = 1/2$. La transformación buscada tiene por ecuaciones

$$u = \frac{3x - y}{4}, \quad v = \frac{-x + 2y}{4}.$$

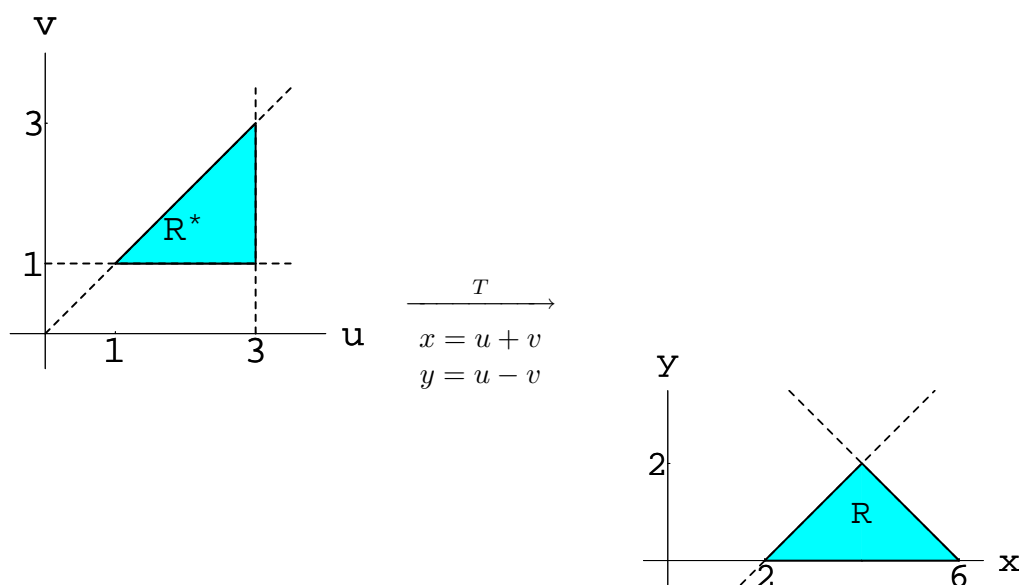
PROBLEMA 5.19

Una región R del plano XY está limitada por las rectas $x + y = 6$, $x - y = 2$ e $y = 0$.

- Determinar la región R^* del plano UV en que se aplica R por la transformación $x = u + v$, $y = u - v$.
- Calcular el jacobiano de la transformación $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.
- Comparar el resultado de b) con la relación entre las áreas de R y R^* .

Solución

La gráfica siguiente muestra las regiones R y R^* :



a) La región R sombreada en la parte derecha de la figura es un triángulo limitado por las rectas dadas. Mediante la transformación dada, la recta $x + y = 6$ se transforma en $(u + v) + (u - v) = 6$, es decir la recta $u = 3$. Análogamente, la recta $x - y = 2$ se transforma en $(u + v) - (u - v) = 2$ o bien la recta $v = 1$. De la misma manera el eje $y = 0$ se convierte en la recta $u = v$. La región transformada R^* es el triángulo de la izquierda en el plano UV .

b) Calculando las derivadas parciales obtenemos directamente

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

c) El área de la región triangular R es 4, en tanto que la de la región R^* es 2. Luego la relación entre ambas es $4/2 = 2$ que coincide con el valor absoluto del jacobiano. Como el jacobiano es constante (lo que ocurre con las transformaciones lineales), las áreas de cualesquiera regiones R del plano XY son el doble de las áreas de las regiones correspondientes transformadas R^* del plano UV .

PROBLEMA 5.20

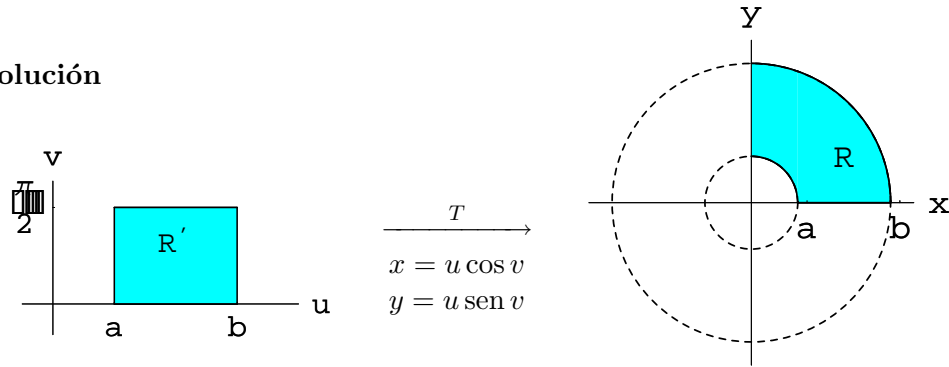
Una región R del plano XY está limitada por las curvas

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = b^2, \quad x = 0, \quad y = 0,$$

con $0 < a < b$, en el primer cuadrante.

- Determinar la región R' en la cual se transforma R por la transformación $x = u \cos v$, $y = u \sin v$.
- Estudiar lo que ocurre si $a = 0$.
- Calcular $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

Solución



- La región R es la indicada en la figura. Por la transformación dada, las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ se convierten en las rectas $u = a$, $u = b$, respectivamente. Asimismo, el segmento $x = 0$ comprendido entre $a \leq y \leq b$ se convierte en $v = \pi/2$, con $a \leq u \leq b$ y el segmento $y = 0$, $a \leq x \leq b$ se transforma en $v = 0$, $a \leq u \leq b$. En definitiva, la región R' buscada es el rectángulo mostrado en la figura.

Se podía haber razonado también diciendo que, por ser u la distancia desde el origen del plano XY y v el ángulo medido a partir del eje positivo de abscisas, es claro que la región que se busca estará dada por $a \leq u \leq b$, $0 \leq v \leq \pi/2$, como se indica en la figura.

- Si $a = 0$, la región R se convierte en un cuadrante de un región circular de radio b y R' sigue siendo un rectángulo. La razón para esto es que el punto $x = 0$, $y = 0$ se aplica en $u = 0$, $v = \text{indeterminada}$ y la transformación no es biunívoca en este punto, llamado por esta razón punto singular.

c) Sustituyendo las derivadas parciales en la matriz obtenemos:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos v & -u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen} v & u \cos v \end{vmatrix} = u(\cos^2 v + \operatorname{sen}^2 v) = u.$$

PROBLEMA 5.21

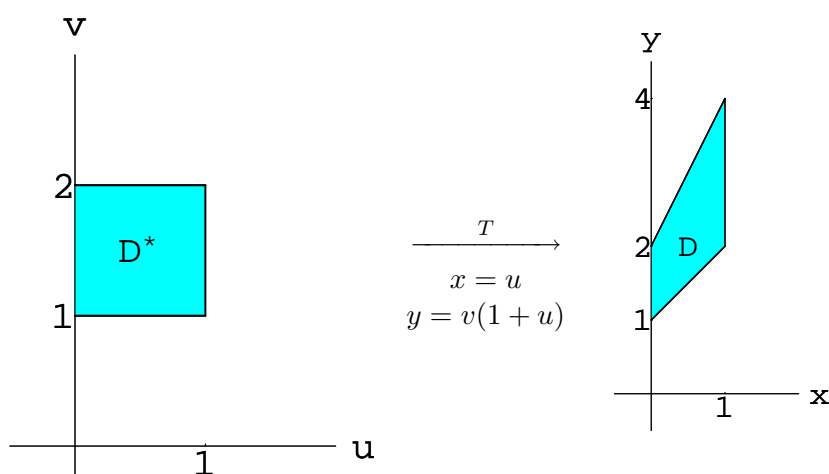
Sea $T(u, v) = (u, v(1+u))$ y $D^* = [0, 1] \times [1, 2]$. Encontrar $D = T(D^*)$ y calcular $\iint_D xy \, dx dy$.

Solución

Busquemos las imágenes de los segmentos que forman la frontera de D^* :

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} v = 1 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{array} \right\} &\implies \left. \begin{array}{l} x = u \\ y = 1 + u \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} y = 1 + x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} u = 1 \\ 1 \leq v \leq 2 \end{array} \right\} &\implies \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2v \\ 1 \leq v \leq 2 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ 2 \leq y \leq 4 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} v = 2 \\ 0 \leq u \leq 1 \end{array} \right\} &\implies \left. \begin{array}{l} x = u \\ y = 2(1+u) \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} y = 2 + 2x \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} u = 0 \\ 1 \leq v \leq 2 \end{array} \right\} &\implies \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = v \\ 1 \leq v \leq 2 \end{array} \right\} \implies \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 1 \leq y \leq 2 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Con esta información, la transformación T corresponde a la figura siguiente:



Para calcular la integral propuesta, podemos aplicar dos métodos:

a) Directamente:

$$\iint_D xy \, dx \, dy = \int_0^1 x \, dx \int_{x+1}^{2x+2} y \, dy = \int_0^1 x \left(\frac{(2x+2)^2}{2} - \frac{(x+1)^2}{2} \right) dx = \frac{17}{8}.$$

b) Con la fórmula del cambio de variables:

Como $J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ v & 1+u \end{vmatrix} = 1+u$, entonces

$$I = \int_0^1 du \int_1^2 uv(1+u)^2 \, dv = \int_0^1 (u + 2u^2 + u^3) \, du \cdot \int_1^2 v \, dv = \frac{17}{8}.$$

PROBLEMA 5.22

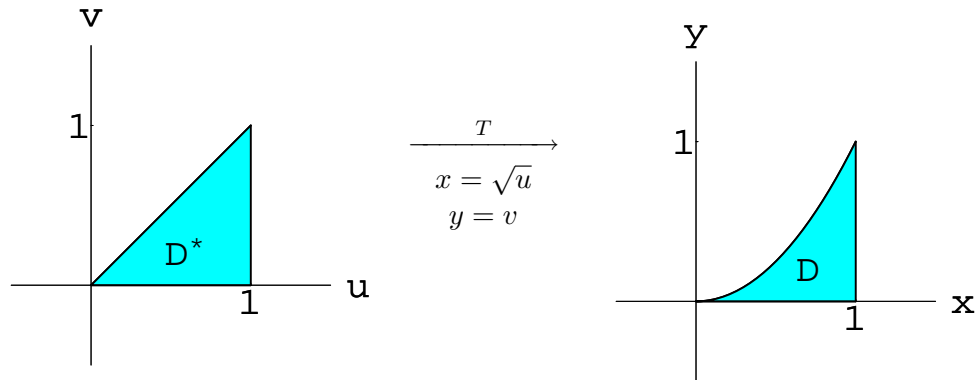
Expresar $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} xy \, dy$ como una integral sobre el triángulo $D^* = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u\}$ y calcular la integral de las dos formas.

Solución

Podemos calcular la integral directamente, aplicando el teorema de Fubini:

$$\int_0^1 x \, dx \int_0^{x^2} y \, dy = \int_0^1 x \cdot \frac{x^4}{2} \, dx = \frac{x^6}{12} \Big|_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Otro método consiste en hacer el cambio de variables $T(u, v) = (\sqrt{u}, v)$ que transforma el triángulo D^* en la región D , indicada en la figura.



Como el jacobiano de la transformación es $J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} 1/2\sqrt{u} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$, por la fórmula del cambio de variable, tenemos:

$$I = \int_0^1 du \int_0^u \sqrt{u} \cdot v \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} du = \int_0^1 \frac{v^2}{4} \Big|_0^u du = \int_0^1 \frac{u^2}{4} du = \frac{1}{12}.$$

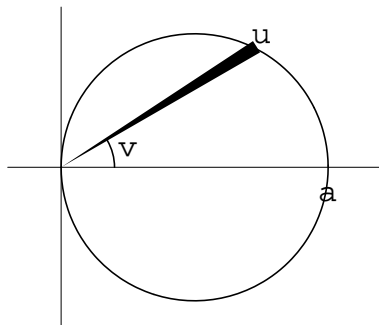
PROBLEMA 5.23

Cambiar a coordenadas polares la integral $\iint_D f(x, y) dx dy$ en los siguientes casos:

- i) D es el círculo: $x^2 + y^2 \leq ax$, $a > 0$.
- ii) D es el recinto del primer cuadrante limitado por las curvas: $x + y = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$.
- iii) D es el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.
- iv) D es el recinto del primer cuadrante limitado por la curva $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.
- v) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$.

Solución

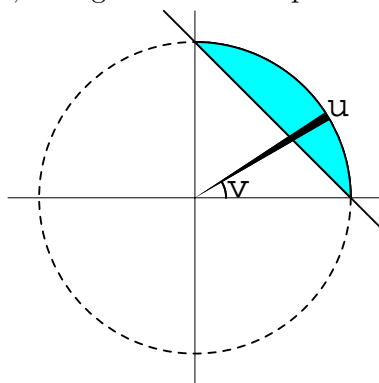
i) Si escribimos la ecuación de la circunferencia en coordenadas polares (haciendo el cambio $x = u \cos v$, $y = u \sin v$), obtenemos $u^2 = au \cos v$, es decir $u = 0$ ó $u = a \cos v$.



De la gráfica adjunta deducimos que, en coordenadas polares, la región verifica las condiciones $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$, $0 \leq u \leq a \cos v$. Así pues, la integral se escribe (teniendo en cuenta el jacobiano de la transformación) como:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dv \int_0^{a \cos v} u \cdot f(u \cos v, u \sin v) du.$$

ii) La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ se escribe en coordenadas polares como $u = 1$, mientras que la recta $x + y = 1$ tiene por ecuación $u = \frac{1}{\cos v + \sin v}$. En el primer cuadrante, el ángulo v está comprendido entre 0 y $\pi/2$.

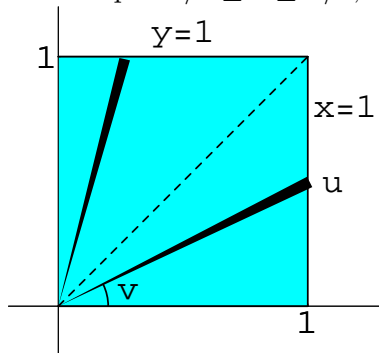


Con estos datos, la integral se escribe como:

$$I = \int_0^{\pi/2} dv \int_{\frac{1}{\cos v + \sin v}}^1 u \cdot f(u \cos v, u \sin v) du.$$

iii) En este caso debemos dividir la región en dos triángulos: el primero de ellos limitado por las rectas $x = y$, $x = 1$ e $y = 0$, lo que en coordenadas polares corresponde a $0 \leq v \leq \pi/4$, $0 \leq u \leq 1/\cos v$; el segundo triángulo

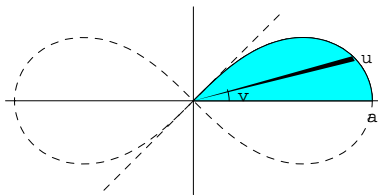
está limitado por las rectas $x = y$, $y = 1$ y $x = 0$, y su expresión en coordenadas polares está dada por $\pi/4 \leq v \leq \pi/2$, $0 \leq u \leq 1/\sin v$.



La integral doble se escribe entonces como:

$$I = \int_0^{\pi/4} dv \int_0^{\frac{1}{\cos v}} u \cdot f(u \cos v, u \sin v) du + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dv \int_0^{\frac{1}{\sin v}} u \cdot f(u \cos v, u \sin v) du.$$

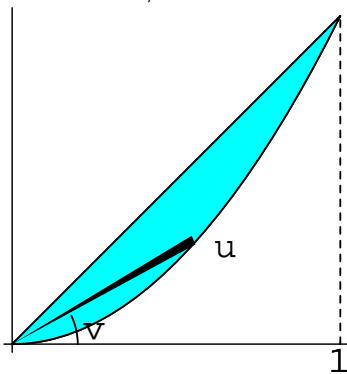
iv) La curva dada es la lemniscata de la figura que, en coordenadas polares, se expresa por la ecuación $u^2 = a^2 \cos 2v$.



En el primer cuadrante, la región está comprendida entre los valores $0 \leq v \leq \pi/4$, así que la integral se expresa como:

$$I = \int_0^{\pi/4} dv \int_0^{a\sqrt{\cos 2v}} u \cdot f(u \cos v, u \sin v) du.$$

v) La ecuación de la parábola $y = x^2$ se expresa en coordenadas polares por $u \sin v = u^2 \cos^2 v$, o bien $u = \sin v / \cos^2 v$.



La región de integración está comprendida entre los valores $v = 0$ y $v = \pi/4$ (correspondiente a la recta $y = x$). Así pues, la integral se expresa así:

$$I = \int_0^{\pi/4} dv \int_0^{\tan v} u \cdot f(u \cos v, u \sin v) du.$$

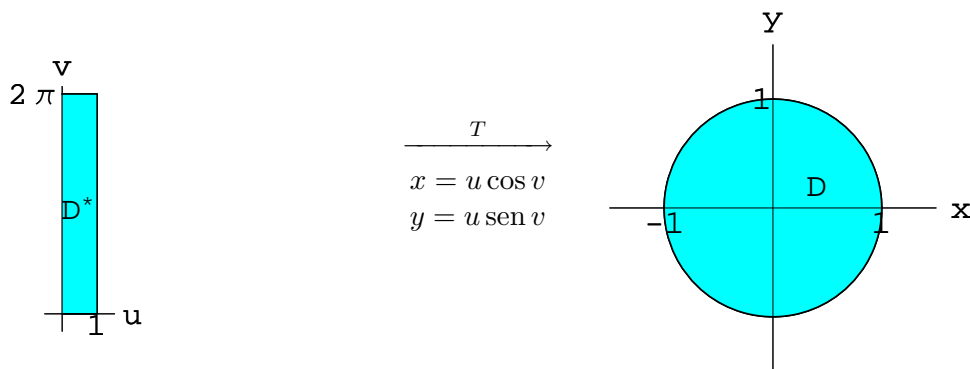
PROBLEMA 5.24

Sea D el círculo unidad. Expresar $\iint_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$ como una integral sobre el rectángulo $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ y calcularla.

Solución

Si aplicamos el cambio a coordenadas polares, dado por las ecuaciones $x = u \cos v$, $y = u \sin v$ (ver figura), y teniendo en cuenta que el jacobiano de la transformación es $J \left(\frac{x, y}{u, v} \right) = u$, la integral se puede calcular del modo siguiente:

$$\begin{aligned} \iint_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} dx dy &= \iint_{D^*} u \cdot (1 + u^2)^{3/2} du dv \\ &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u \cdot (1 + u^2)^{3/2} du \\ &= \pi \cdot \frac{(1 + u^2)^{5/2}}{5/2} \Big|_0^1 = \frac{8\pi\sqrt{2}}{5}. \end{aligned}$$



PROBLEMA 5.25

Dibujar la región de integración y resolver la siguiente integral:

$$\int_{1/\sqrt{2}}^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^x xy \, dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^x xy \, dy + \int_0^{\sqrt{4-x^2}} xy \, dy.$$

Solución

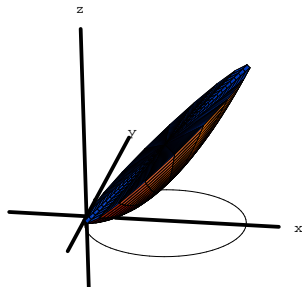
La región de integración es la unión de las regiones correspondientes a cada sumando. De este modo la gráfica corresponde a un sector de corona circular comprendido entre las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, y el ángulo comprendido entre 0 y $\pi/4$. Esto sugiere calcular la integral pasando a coordenadas polares, de modo que su valor es:

$$I = \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_1^2 \rho \cdot \rho^2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\rho = \int_0^{\pi/4} \sin \vartheta d(\sin \vartheta) \int_1^2 \rho^3 d\rho = \frac{15}{16}.$$

PROBLEMA 5.26

Calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = x$.

Solución



El paraboloides y el plano se cortan en una curva cuya proyección sobre el plano XY es la circunferencia $x^2 + y^2 = x$. Así pues, el volumen se escribe mediante la integral doble $\iint_R [x - (x^2 + y^2)] dx dy$, donde R es el círculo $x^2 + y^2 \leq x$.

Si escribimos la región R en coordenadas polares, $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$, sabiendo que $J\left(\frac{x, y}{r, \vartheta}\right) = r$, la integral se escribe como:

$$\begin{aligned} V &= \iint_R [x - (x^2 + y^2)] dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{\cos \vartheta} (r \cos \vartheta - r^2) r dr \right) d\vartheta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos \vartheta \frac{\cos^3 \vartheta}{3} - \frac{\cos^4 \vartheta}{4} \right) d\vartheta = \frac{\pi}{32}. \end{aligned}$$

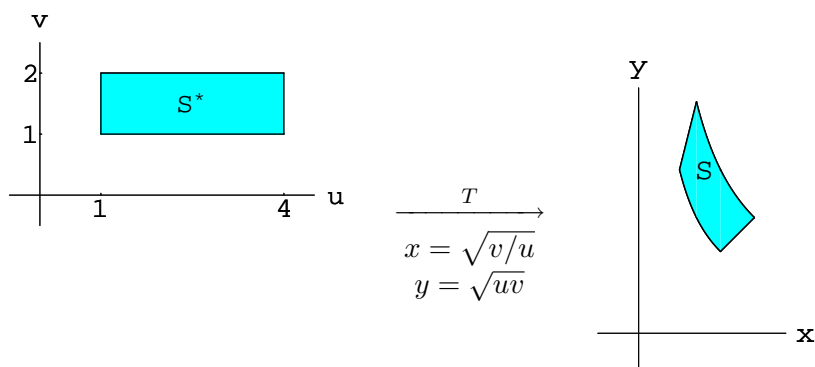
PROBLEMA 5.27

Si S es la región del primer cuadrante limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 4x$, probar que

$$\iint_S f(x \cdot y) dx dy = \ln 2 \int_1^2 f(u) du.$$

Solución

La frontera de la región S sugiere realizar el cambio $u = y/x$, $v = yx$, cuya inversa es la transformación $T(u, v) = (\sqrt{v/u}, \sqrt{uv})$, la cual tiene como dominio la región S^* de la figura adjunta.



El jacobiano de esta transformación es

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \cdot u^{-3/2} v^{1/2} & \frac{1}{2} \cdot u^{-1/2} v^{-1/2} \\ \frac{1}{2} \cdot u^{-1/2} v^{1/2} & \frac{1}{2} \cdot u^{1/2} v^{-1/2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{2u}.$$

Por la fórmula del cambio de variable, la integral dada se puede escribir como:

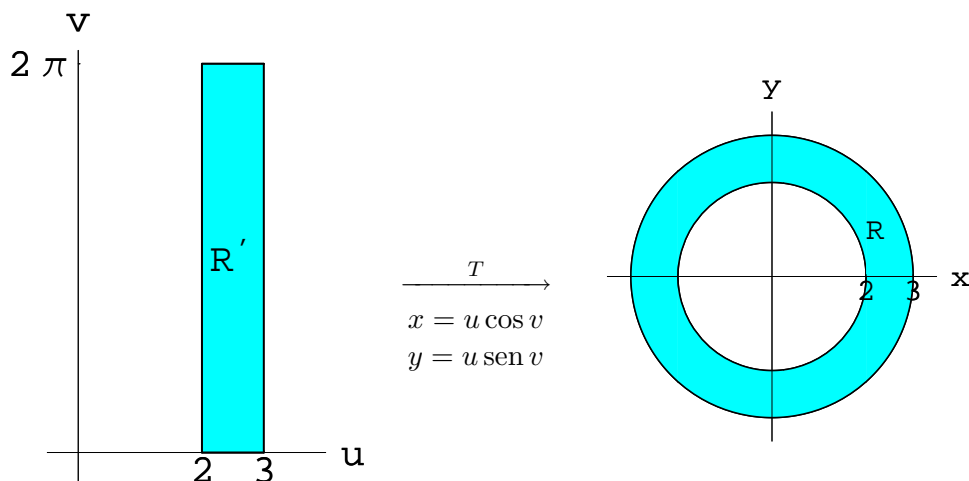
$$\iint_S f(x \cdot y) \, dx \, dy = \int_1^4 du \int_1^2 \frac{1}{2u} \cdot f(v) \, dv = \frac{1}{2} \ln u \Big|_1^4 \int_1^2 f(v) \, dv = \ln 2 \int_1^2 f(v) \, dv.$$

PROBLEMA 5.28

Calcular $\iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$ siendo R la región del plano XY limitada por $x^2 + y^2 = 4$ y $x^2 + y^2 = 9$.

Solución

La presencia de $x^2 + y^2$ sugiere el empleo de coordenadas polares (r, ϑ) , con $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$. Mediante esta transformación la corona circular R se transforma en el rectángulo R' como se indica en la figura.



Debido a que $\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \vartheta)} = r$, se tiene:

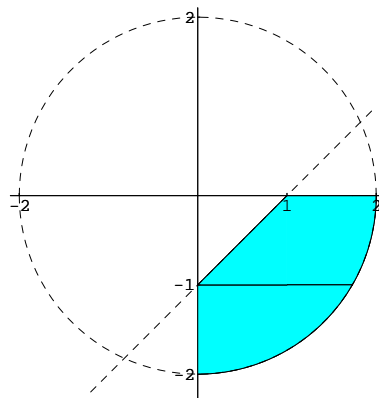
$$\begin{aligned}
 A &= \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy = \iint_{R'} r \cdot r \, dr d\vartheta = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_2^3 r^2 \, dr \\
 &= \int_0^{2\pi} r^3/3 \Big|_2^3 \, d\vartheta = \frac{38\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

También se podían haber obtenido los límites de integración para R' observando la región R pues, para ϑ fijo, r varía desde $r = 2$ hasta $r = 3$ dentro del sector destacado en la figura. Integrando entonces con respecto a ϑ desde $\vartheta = 0$ hasta $\vartheta = 2\pi$ se obtiene la suma de todos los sectores citados.

PROBLEMA 5.29

Dados $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, x - y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4\}$ y $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$, calcular $I = \iint_A f(x, y) \, dx dy$.

Solución



Si escribimos la integral en coordenadas cartesianas, debemos descomponer la región en dos partes. Por tanto (vista como región de tipo II),

$$I = \int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2)^{-1/2} dx + \int_{-1}^0 dy \int_{1+y}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2 + y^2)^{-1/2} dx.$$

Si escribimos la integral en coordenadas polares, los extremos de integración para la variable r son $r \cos \vartheta - r \sin \vartheta = 1$ (pues corresponde a la recta $x - y = 1$) y $r = 2$ (pues corresponde a la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$).

Por otra parte, los extremos de integración de la variable ϑ son $-\pi/2$ y 0 (pues la región está contenida en el cuarto cuadrante) o bien $3\pi/2$ y 2π .

Así pues, el planteamiento correcto de la integral es

$$I = \int_{-\pi/2}^0 d\theta \int_{(\cos\theta - \sin\theta)^{-1}}^2 dr = \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\theta \int_{(\cos\theta - \sin\theta)^{-1}}^2 dr$$

(el jacobiano se simplifica con el valor de la función).

PROBLEMA 5.30

Sea $I = \delta \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$, donde

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \leq z \leq \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2 - y^2}\}.$$

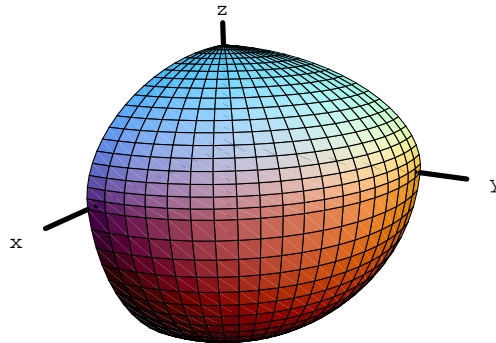
Decir razonadamente si cada una de las siguientes igualdades es cierta:

$$(a) \quad I = \int_0^2 dx \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) dz$$

$$(b) \quad I = \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4r^4 (4 \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi) d\varphi + \int_0^2 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r^4 \sin \varphi d\varphi.$$

Solución

El sólido es la región limitada superiormente por el elipsoide $x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ e inferiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, y contenida en el primer octante. Ambas superficies se cortan a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ contenida en el plano XY .



La respuesta del apartado (a) no es correcta pues, si los límites de integración de las variables x e y son constantes, la región sería un rectángulo y no la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$.

Para comprobar si la respuesta del apartado (b) es correcta, debemos descomponer la integral en dos sumandos: el primero correspondiente a $z \geq 0$ y el segundo a $z \leq 0$.

Para la cara superior, hacemos el cambio de variables $x = 2r \cos \vartheta \sin \varphi$, $y = 2r \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = r \cos \varphi$, donde $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, y cuyo jacobiano es $J = 4r^2 \sin \varphi$.

Al sustituir estos valores en la integral propuesta, se obtiene

$$\int_0^1 dr \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\pi/2} 4r^4 (4 \sin^3 \varphi + \cos^2 \varphi \sin \varphi) d\varphi$$

el primer sumando de la respuesta.

Para la cara inferior, hacemos el cambio de variables a esféricas $x = r \cos \vartheta \sin \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = r \cos \varphi$, donde $0 \leq r \leq 2$, $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, $\pi/2 \leq \varphi \leq \pi$, y cuyo jacobiano es $J = r^2 \sin \varphi$.

Al sustituir estos nuevos valores en la integral propuesta se obtiene

$$\int_0^2 dr \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_{\pi/2}^{\pi} r^4 \sin \varphi d\varphi$$

el segundo sumando de la respuesta.

PROBLEMA 5.31

Calcular el volumen del sólido W definido por:

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq ax, z \geq 0\},$$

donde $a > 0$.

Solución

El sólido es la región limitada por el plano $z = 0$ y la semiesfera $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ y la región de integración R es el círculo $x^2 + y^2 \leq ax$, que tiene centro en el punto $(a, 0)$ y radio a .

Así pues, el volumen se escribe mediante la integral doble $\iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$.

Si escribimos la región R en coordenadas polares $x = r \cos \vartheta$, $y = r \sin \vartheta$, y tenemos en cuenta la simetría de W , sabiendo que $J\left(\frac{x,y}{r,\vartheta}\right) = r$, la integral se escribe como:

$$\begin{aligned} V &= \iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy = 2 \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{a \cos \vartheta} r \sqrt{a^2 - r^2} dr \right) d\vartheta \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} (a^3 \sin^3 \vartheta - a^3) d\vartheta = \frac{(3\pi - 4)a^3}{9}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.32

Solución

PROBLEMA 5.33

Calcular $\iint_D \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ sobre la región D del primer cuadrante limitada por $x^2 + y^2 = 9$.

Solución

Pasando la integral a coordenadas polares $\begin{cases} x = \rho \cos \vartheta \\ y = \rho \sin \vartheta \end{cases}$, como $J\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\vartheta)} = \rho$, la integral queda:

$$\iint_D \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy = \int_0^3 \rho^3 d\rho \int_0^{\pi/2} \cos^3 \vartheta d\vartheta = \frac{2}{3} \int_0^3 \rho^3 d\rho = \frac{27}{2}.$$

PROBLEMA 5.34

Calcular las siguientes integrales:

i) $\iint_{\pi^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4\pi^2} \sin \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy.$

ii) $\iint_D |xy| \, dx dy$, donde D es un círculo de radio a y con centro en el origen de coordenadas.

Solución

i) Si escribimos la integral en coordenadas polares, queda de la forma:

$$I = \int_0^{2\pi} dv \int_{\pi}^{2\pi} u \sin u \, du = -6\pi^2.$$

[Mediante integración por partes se obtiene que $\int u \sin u \, du = \sin u - u \cos u$.]

ii) Escribimos también la integral en coordenadas polares, y resulta:

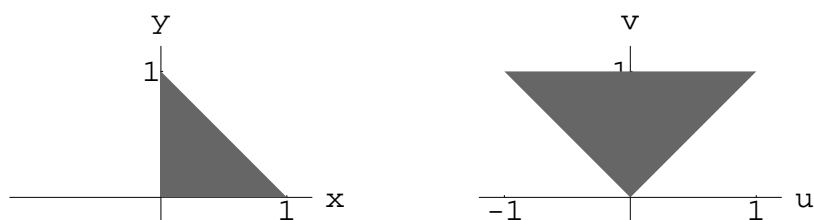
$$I = \int_0^{2\pi} dv \int_0^a u |u^2 \sin v \cos v| \, du = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2v| \, dv \cdot \int_0^a u^3 \, du = \frac{a^4}{2}.$$

PROBLEMA 5.35

Calcular $\iint_R \cos \frac{x-y}{x+y} \, dx dy$, donde R es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

Solución

Hacemos el cambio de variable $u = x - y$, $v = x + y$. Esto convierte el triángulo dado en el plano XY en el triángulo de vértices $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$ en el plano UV .



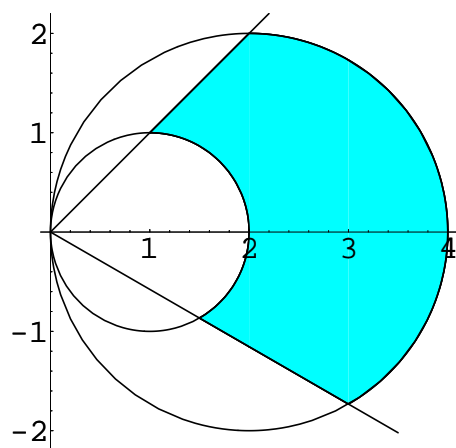
Como $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{2}$, la integral queda ahora:

$$\iint_R \cos \frac{x-y}{x+y} dx dy = \iint_{R^*} \cos \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{2} du dv = \int_0^1 dv \int_{-v}^v \frac{1}{2} \cos \frac{u}{v} du = \frac{\sin 1}{2}.$$

PROBLEMA 5.36

Calcular el área de la región $R = \{(x, y) : 2x \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 \leq 4x, y \leq x, \frac{-x}{\sqrt{3}} \leq y\}$ y la masa del cuerpo con densidad $\rho(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ y contenido en dicha región.

Solución



Transformamos la región dada en coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = r \cos \vartheta \\ y = r \sin \vartheta. \end{cases}$$

Si escribimos las curvas frontera de R en coordenadas polares, obtenemos los límites de la región:

$$-\pi/6 \leq \vartheta \leq \pi/4, \quad 2 \cos \vartheta \leq r \leq 4 \cos \vartheta.$$

Como $J\left(\frac{x, y}{r, \vartheta}\right) = r$, las integrales quedan:

$$\text{Área} = \iint_R dx dy = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} \left(\int_{2 \cos \vartheta}^{4 \cos \vartheta} r dr \right) d\vartheta = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} \frac{12 \cos^2 \vartheta}{2} d\vartheta = \frac{6 + 3\sqrt{3} + 5\pi}{4}.$$

$$\text{Masa} = \iint_R \rho(x, y) dx dy = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} \left(\int_{2 \cos \vartheta}^{4 \cos \vartheta} r \cdot \frac{r \sin \vartheta}{r^2} dr \right) d\vartheta = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} 2 \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta = \frac{1}{4}.$$

PROBLEMA 5.37

Solución

PROBLEMA 5.38

Solución

PROBLEMA 5.39

Transformar la siguiente integral doble a coordenadas polares y resolverla:

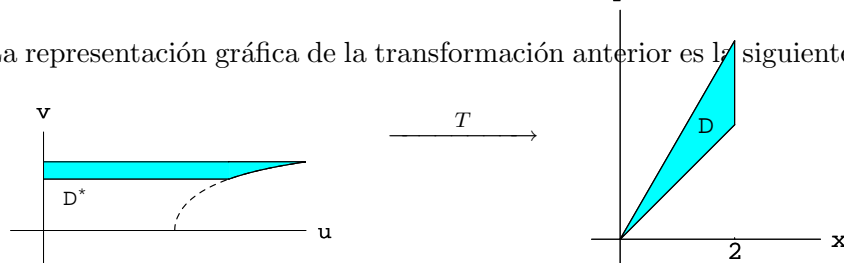
$$\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} x dy.$$

Solución

Calculemos en primer lugar la imagen de cada uno de los lados del triángulo dado mediante la transformación $x = u \cos v$, $y = u \sin v$:

$$\begin{aligned} y = x, \quad 0 \leq x \leq 2 &\implies \sin v = \cos v, \quad 0 \leq u \cos v \leq 2 \\ &\implies v = \pi/4, \quad 0 \leq u \leq 2\sqrt{2}; \\ y = x\sqrt{3}, \quad 0 \leq x \leq 2 &\implies \sin v = \sqrt{3} \cos v, \quad 0 \leq u \cos v \leq 2 \\ &\implies v = \pi/3, \quad 0 \leq u \leq 4; \\ x = 2, \quad 2 \leq y \leq 2\sqrt{3} &\implies u \cos v = 2, \quad 2 \leq u \sin v \leq 2\sqrt{3} \\ &\implies u = 2 \sec v, \quad \pi/4 \leq v \leq \pi/3. \end{aligned}$$

La representación gráfica de la transformación anterior es la siguiente:



La integral propuesta se resuelve entonces como sigue:

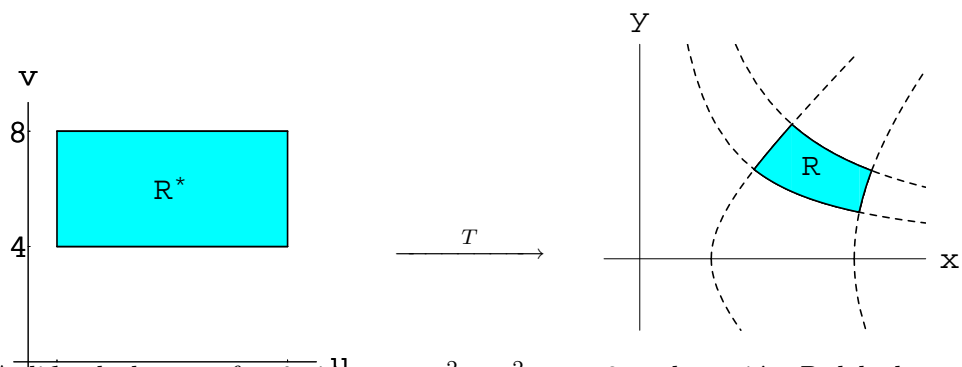
$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} dv \int_0^{2 \sec v} u^2 \cos v \, du = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos v}{3} \cdot 8 \sec^3 v \, dv = \frac{8}{3} \operatorname{tg} v \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{8}{3}(\sqrt{3}-1).$$

Se deja como ejercicio comprobar que el mismo resultado se obtiene calculando directamente la integral propuesta.

PROBLEMA 5.40

Hallar $\iint_R (x^2 + y^2) \, dx \, dy$, donde R es la región del plano XY limitada por las hipérbolas $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 9$, $xy = 2$, $xy = 4$ en el primer cuadrante.

Solución



Aplicando la transformación $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, la región R del plano XY de la derecha de la figura se transforma en la región R' del plano UV representada en la izquierda de la figura. Vamos a comprobar que dicha transformación es regular.

Debido a que $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$, es decir $x^2 + y^2 = \sqrt{u^2 + v^2}$, y como $x^2 - y^2 = u$, resulta que $x^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}$. Al ser $x > 0$, tenemos que $x = \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + v^2}}{2}}$. Análogamente, tenemos también que $y = \sqrt{\frac{\sqrt{u^2 + v^2} - u}{2}}$, lo que prueba que la transformación es inyectiva.

Trivialmente, la transformación es de clase C^1 y además

$$J_T(u, v) = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2) \neq 0$$

si $(x, y) \neq (0, 0)$.

Hecha esta comprobación la integral vale entonces

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y^2) dx dy &= \iint_{R'} (x(u, v)^2 + y(u, v)^2) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \iint_{R'} \sqrt{u^2 + v^2} \frac{du dv}{4\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{1}{4} \int_1^9 du \int_4^8 dv = 8. \end{aligned}$$

Nota. Las coordenadas curvilíneas (u, v) definidas de la forma anterior son las llamadas coordenadas hiperbólicas.

PROBLEMA 5.41

Calcular $I = \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$ extendida al dominio D interior a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución

Haremos el cambio de variable $\begin{cases} x/a = \rho \cos \vartheta \\ y/b = \rho \sin \vartheta \end{cases}$, con lo que

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \vartheta)} = \begin{vmatrix} a \cos \vartheta & -a \rho \sin \vartheta \\ b \sin \vartheta & b \rho \cos \vartheta \end{vmatrix} = ab\rho.$$

En las nuevas coordenadas, la elipse se escribe como $\rho = 1$. Así pues,

$$I = \iint_{D^*} (1 - \rho^2) ab \rho \, d\rho d\vartheta = ab \int_0^1 (\rho - \rho^3) \, d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta = \frac{\pi ab}{2}.$$

PROBLEMA 5.42

Hallar $N = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$.

Solución

Como $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^\infty e^{-y^2} dy$, entonces

$$N^2 = \int_0^\infty e^{-x^2} dx \cdot \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

Pasando a coordenadas polares, $x^2 + y^2 = \rho^2$, $dx dy = \rho d\rho d\vartheta$, el primer cuadrante $(x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$ se transforma en la región $(\rho, \vartheta) \in (0, \infty) \times (0, \pi/2)$. La integral queda entonces:

$$N^2 = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho \, d\rho = \int_0^{\pi/2} \left[\lim_{a \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \Big|_0^a \right] d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\vartheta = \frac{\pi}{4}.$$

En definitiva, $N = \sqrt{\pi}/2$.

PROBLEMA 5.43

Hallar el área de la región limitada por:

- a) Las curvas $y^2 = 2px$, $y^2 = 2qx$, $x^2 = 2ry$, $x^2 = 2sy$, $0 < p < q$, $0 < r < s$.
- b) La curva $(x^2 + y^2)^2 = a(x^3 - 3xy^2)$, $a > 0$.
- c) Las curvas $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 1$, $\sqrt{x/a} + \sqrt{y/b} = 2$, $x/a = y/b$, $4x/a = y/b$, $a, b > 0$.

Solución

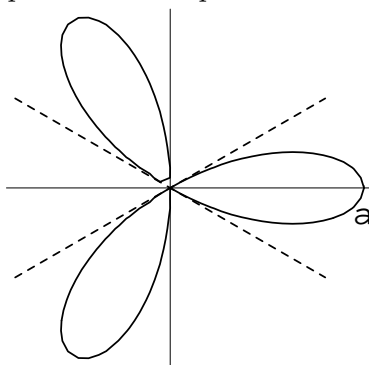
a) La forma de las ecuaciones que limitan la región sugiere realizar el cambio de variables $u = \frac{y^2}{2x}$, $v = \frac{x^2}{2y}$. De este modo, la región de integración es ahora $D = \{(u, v) : p \leq u \leq q, r \leq v \leq s\}$. Como

$$J\left(\frac{u, v}{x, y}\right) = \begin{vmatrix} -y^2/2x^2 & y/x \\ x/y & -x^2/2y^2 \end{vmatrix} = \frac{-3}{4},$$

entonces $\left|J\left(\frac{x, y}{u, v}\right)\right| = \frac{4}{3}$. El área buscada viene dada por la fórmula

$$A = \int_p^q du \int_r^s \frac{4}{3} dv = \frac{4}{3} (s - r) \cdot (q - p).$$

b) Debido a la simetría de la región (ver figura), bastará multiplicar por 6 el área de la parte comprendida en el primer cuadrante.



En coordenadas polares, la curva dada tiene por ecuación

$$u = a \cos v (\cos^2 v - 3 \sin^2 v),$$

de modo que el área buscada se calcula por la integral doble

$$\begin{aligned} A &= 6 \int_0^{\pi/6} dv \int_0^{a \cos v (\cos^2 v - 3 \sin^2 v)} u \, du \\ &= 3a^2 \int_0^{\pi/6} \cos^2 v (\cos^2 v - 3 \sin^2 v)^2 \, dv = \frac{a^2 \pi}{4}. \end{aligned}$$

c) Realizaremos la transformación de coordenadas siguiente:

$$u = \frac{\sqrt{y/b}}{\sqrt{x/a}}, \quad v = \sqrt{x/a} + \sqrt{y/b}$$

(dicha transformación es biyectiva porque la región está contenida en el primer cuadrante).

Con esta transformación los nuevos límites de la región son $1 \leq u \leq 2$, $1 \leq v \leq 2$. Como la inversa de la transformación es $x = \frac{av^2}{(u+1)^2}$, $y = \frac{bu^2v^2}{(u+1)^2}$, entonces

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{-4abuv^3}{(u+1)^4},$$

y el área se calcula mediante la integral doble

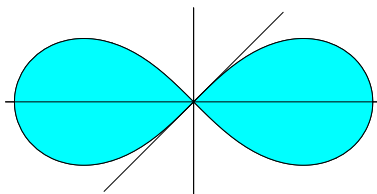
$$A = \int_1^2 du \int_1^2 \frac{4abuv^3}{(u+1)^4} \, dv = \frac{65ab}{108}.$$

PROBLEMA 5.44

Hallar el área de la región del plano XY encerrada por la lemniscata $r^2 = a^2 \cos 2\vartheta$.

Solución

La curva está dada directamente en coordenadas polares (r, ϑ) . Dando diferentes valores a ϑ y hallando los correspondientes valores de r se obtiene la gráfica de la figura.



El área buscada (teniendo en cuenta la simetría) se puede calcular así:

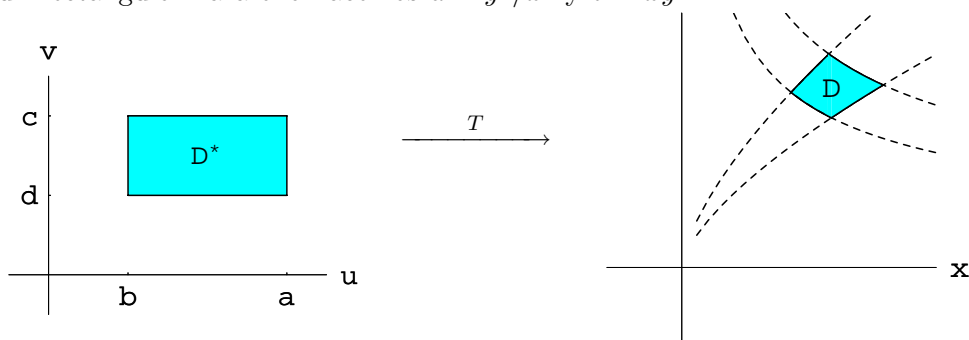
$$\begin{aligned} A &= 4 \int_0^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{a\sqrt{\cos 2\vartheta}} r \, dr = 4 \int_0^{\pi/4} \frac{r^2}{2} \Big|_0^{a\sqrt{\cos 2\vartheta}} d\vartheta \\ &= 2 \int_0^{\pi/4} a^2 \cos 2\vartheta \, d\vartheta = a^2 \sin 2\vartheta \Big|_0^{\pi/4} = a^2. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.45

Calcular el área del recinto situado en el primer cuadrante limitado por las curvas $y^3 = ax^2$, $y^3 = bx^2$ ($a > b > 0$), $xy^2 = c$, $xy^2 = d$ ($c > d > 0$).

Solución

Vamos a efectuar un cambio de variable que transforme la región dada en un rectángulo. Para ello hacemos $u = y^3/x^2$ y $v = xy^2$.



De este modo,

$$A = \iint_R \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Ahora bien, de las ecuaciones $u = y^3/x^2$, $v = xy^2$, resulta:

$$\begin{aligned} x^2 = y^3/u, \quad x^2 = v^2/y^4 &\implies y^3/u = v^2/y^4, \quad x^2 = v^2/y^4 \\ &\implies y = u^{1/7}v^{2/7}, \quad x = v/y^2 = u^{-2/7}v^{3/7}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} -\frac{2}{7}u^{-9/7}v^{3/7} & \frac{3}{7}u^{-2/7}v^{-4/7} \\ \frac{1}{7}u^{-6/7}v^{2/7} & \frac{2}{7}u^{1/7}v^{-5/7} \end{vmatrix} = -\frac{1}{7}u^{-8/7}v^{-2/7}.$$

El área pedida se calcula entonces como

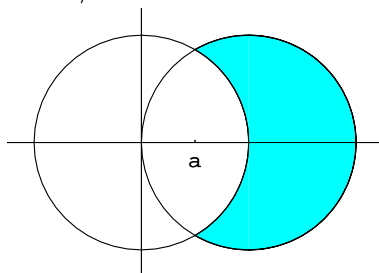
$$\begin{aligned} A &= \int_b^a u^{-8/7} du \int_d^c \frac{1}{7} v^{-2/7} dv = \frac{1}{7} \left(\frac{u^{-1/7}}{-1/7} \Big|_b^a \right) \cdot \left(\frac{v^{5/7}}{5/7} \Big|_d^c \right) \\ &= -\frac{7}{5} (a^{-1/7} - b^{-1/7}) \cdot (c^{5/7} - d^{5/7}). \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.46

Hallar el área de la región exterior a la circunferencia $\rho = 2a$ e interior a la circunferencia $\rho = 4a \cos \vartheta$.

Solución

Los puntos de intersección de ambas circunferencias son aquellos en que $\cos \vartheta = 1/2$, es decir $\vartheta = \pm\pi/3$.

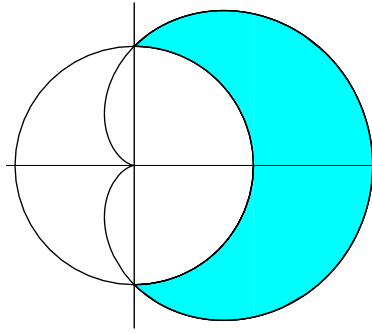


Teniendo en cuenta la simetría de la región, el área viene dada por

$$A = 2 \int_0^{\pi/3} d\vartheta \int_{2a}^{4a \cos \vartheta} \rho d\rho = \int_0^{\pi/3} [(4a \cos \vartheta)^2 - (2a)^2] d\vartheta = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{3} a^2.$$

PROBLEMA 5.47

Hallar el área exterior a la circunferencia $\rho = 2$ e interior a la cardioide $\rho = 2(1 + \cos \vartheta)$.

Solución

Dada la simetría, el área pedida es igual al doble del área barrida al variar ϑ desde $\vartheta = 0$ hasta $\vartheta = \pi/2$. Así pues,

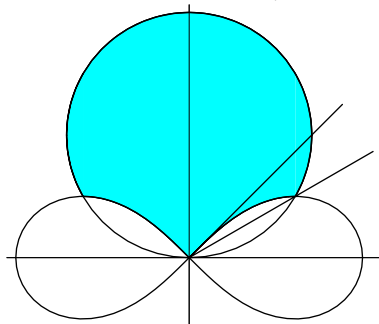
$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_2^{2(1+\cos \vartheta)} \rho \, d\rho = 2 \int_0^{\pi/2} \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_2^{2(1+\cos \vartheta)} d\vartheta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} (2 \cos \vartheta + \cos^2 \vartheta) d\vartheta = 4 \left(2 \sin \vartheta + \vartheta/2 + \sin(2\vartheta)/4 \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi + 8. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.48

Hallar el área interior a la circunferencia $\rho = 4 \sin \vartheta$ y exterior a la lemniscata $\rho^2 = 8 \cos 2\vartheta$.

Solución

El área pedida es igual al doble de la correspondiente en el primer cuadrante limitada por las dos curvas y la recta $\vartheta = \pi/2$.



Los puntos de intersección de ambas curvas se encuentran en la recta $\vartheta = \pi/6$, que se obtiene al resolver la ecuación

$$16 \operatorname{sen}^2 \vartheta = 8 \cos 2\vartheta.$$

Observamos que el arco AO de la lemniscata se genera al variar ϑ desde $\vartheta = \pi/6$ hasta $\vartheta = \pi/4$, mientras que el arco AB de la circunferencia lo hace al variar ϑ desde $\vartheta = \pi/6$ hasta $\vartheta = \pi/2$. Si descomponemos la figura en dos partes, una por debajo y otra por encima de la recta $\vartheta = \pi/4$, el área queda de la forma:

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\vartheta \int_{2\sqrt{2}\cos 2\vartheta}^{4\operatorname{sen} \vartheta} \rho \, d\rho + 2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{4\operatorname{sen} \vartheta} \rho \, d\rho \\ &= \int_{\pi/6}^{\pi/4} (16 \operatorname{sen}^2 \vartheta - 8 \cos 2\vartheta) \, d\vartheta + \int_{\pi/4}^{\pi/2} 16 \operatorname{sen}^2 \vartheta \, d\vartheta = \frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3} - 4. \end{aligned}$$

Otro método de resolución consiste en efectuar la diferencia

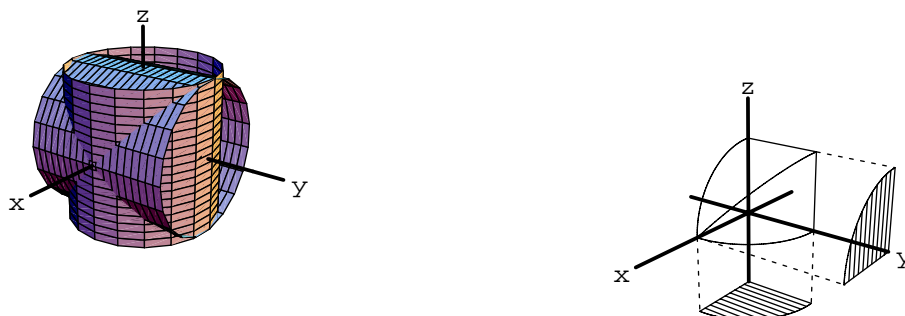
$$A = 2 \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{4\operatorname{sen} \vartheta} \rho \, d\rho - \int_{\pi/6}^{\pi/4} d\vartheta \int_0^{\sqrt{8\cos 2\vartheta}} \rho \, d\rho.$$

PROBLEMA 5.49

Hallar el volumen de la región común a los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$.

Solución

En la figura adjunta se muestran los dos cilindros y la parte de la región correspondiente al primer octante.



De modo que el volumen será

$$V = 8 \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dy = 8 \int_0^a (a^2-x^2) dx = \frac{16a^3}{3}.$$

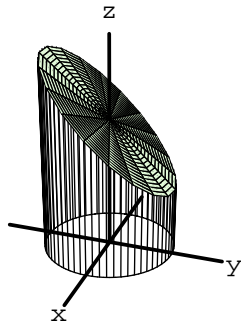
PROBLEMA 5.50

Hallar el volumen del sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $y + z = 4$, $z = 0$.

Solución

La proyección del cilindro sobre el plano $z = 0$ es la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, de modo que el volumen viene dado por la fórmula

$$V = \int_{-2}^2 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4-y) dx.$$



Nuevamente escribimos la integral en coordenadas polares. Resulta:

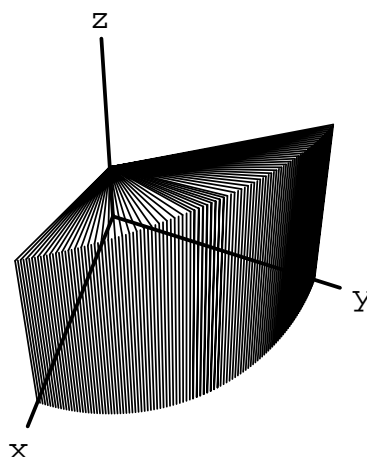
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^2 u(4 - u \sin v) du \\ &= \int_0^{2\pi} \left(2u^2 - \frac{u^3}{3} \sin v \right) \Big|_0^2 dv = \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{8}{3} \sin v \right) dv = 16\pi. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.51

Calcular el volumen de la sección situada en el primer octante del sólido limitado por los planos $z = 0$ y $z = x + y + 2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 16$.

Solución

La base del sólido es la región R del plano comprendida en el primer cuadrante y limitado por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 16$. El plano $z = x + y + 2$ limita dicho sólido en su parte superior.



Así pues, el volumen vendrá dado por:

$$\begin{aligned} V &= \iint_R z(x, y) \, dx \, dy = \int_0^4 dx \int_0^{\sqrt{16-x^2}} (x + y + 2) \, dy \\ &= \int_0^4 \left(x\sqrt{16-x^2} + 8 - \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{16-x^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Para evitar resolver la integral de la función irracional $\sqrt{16-x^2}$, podemos escribir la integral doble en coordenadas polares. Así,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^4 u(u \cos v + u \sin v + 2) \, du \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{u^3}{3}(\cos v + \sin v) + u^2 \right]_0^4 dv = \frac{64}{3}(\sin v - \cos v) + 16v \Big|_0^{2\pi} = \frac{128}{3} + 8\pi. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.52

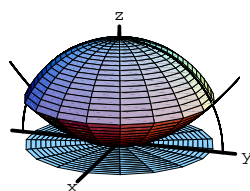
Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ e inferiormente por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$.

Solución

Calculamos en primer lugar los puntos de intersección de la esfera con el paraboloide. Tenemos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 4z \end{cases} \implies \begin{cases} z^2 + 4z - 5 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4z \end{cases} \implies \begin{matrix} z = 1 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{matrix}$$

Tenemos pues la situación de la figura adjunta.



El volumen pedido se halla mediante la fórmula

$$V = \iint_D \left(\sqrt{5 - x^2 - y^2} - \frac{x^2 + y^2}{4} \right) dx dy,$$

donde D es el círculo $x^2 + y^2 < 4$, que se obtiene como proyección del sólido en el plano XY .

Para resolver la integral, la transformamos a coordenadas polares; en este caso, $D = \{(\rho, \vartheta) : 0 < \rho < 2, 0 \leq \vartheta < 2\pi\}$. Entonces:

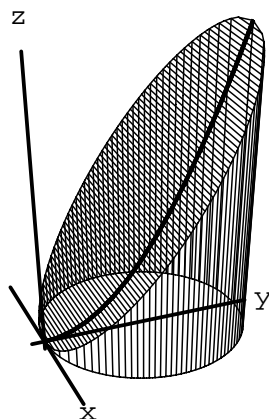
$$V = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^2 \left(\sqrt{5 - \rho^2} - \frac{\rho^2}{4} \right) \rho d\rho = 2\pi \int_0^2 \left(\rho \sqrt{5 - \rho^2} - \frac{\rho^3}{4} \right) d\rho = \frac{2\pi(5\sqrt{5} - 4)}{3}.$$

PROBLEMA 5.53

Hallar el volumen limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$, el cilindro $x^2 + y^2 = 8y$ y el plano $z = 0$.

Solución

El volumen pedido se obtiene integrando la función $z = (x^2 + y^2)/4$ en el interior del círculo $x^2 + y^2 = 8y$.



En coordenadas cilíndricas, $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$, $z = z$, y el volumen se obtiene al integrar $z = \rho^2/4$ en el círculo $\rho = 8 \sin \vartheta$. Por tanto,

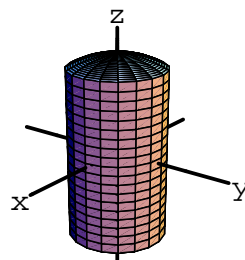
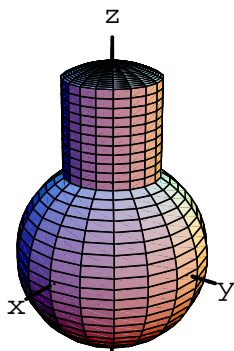
$$V = \iiint_R z \, dA = \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{8 \sin \vartheta} z(\rho, \vartheta) \rho \, d\rho = \frac{1}{4} \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{8 \sin \vartheta} \rho^3 \, d\rho = 96\pi.$$

PROBLEMA 5.54

Hallar el volumen que se elimina cuando a una esfera de radio $2a$ se le practica un orificio circular de radio a de forma que el eje del orificio sea un diámetro de la esfera.

Solución

En la primera figura se muestra, desplazada verticalmente, la región que se extrae de la esfera y en la segunda figura la propia región sin la esfera.



De la figura se deduce que el volumen pedido es ocho veces el correspondiente al del primer octante limitado (en coordenadas cilíndricas) por el cilindro $\rho^2 = a^2$, la esfera $\rho^2 + z^2 = 4a^2$ y el plano $z = 0$. Esto se obtiene integrando $z = \sqrt{4a^2 - \rho^2}$ en un cuadrante del círculo $\rho = a$, es decir:

$$V = 8 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^a \rho \sqrt{4a^2 - \rho^2} d\rho = \frac{4}{3}(8 - 3\sqrt{3})a^3\pi.$$

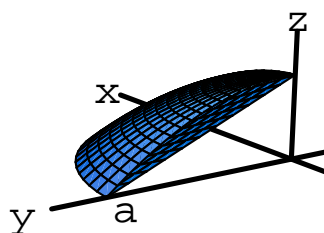
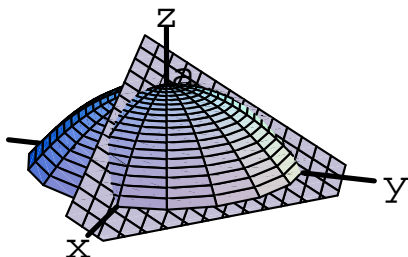
PROBLEMA 5.55

Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies:

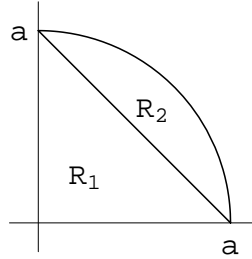
- i) $az = a^2 - x^2 - y^2$, $z = a - x - y$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ($a > 0$).
- ii) $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = x$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

Solución

i) El sólido consiste en la región del primer octante limitada por el paraboloide $az = a^2 - x^2 - y^2$ y el plano $z = a - x - y$. En la figura de la derecha se muestra una vista lateral del sólido limitado exclusivamente al primer octante.



Observemos que la región de integración, el cuadrante del círculo con centro el origen y radio a , debe dividirse en dos regiones R_1 y R_2 , pues en R_1 el sólido está limitado por el paraboloide y el plano $z = a - x - y$, y en R_2 el sólido está limitado por el paraboloide y el plano $z = 0$.



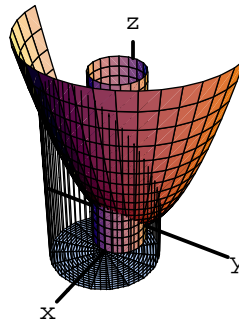
De este modo, el volumen se expresa por la integral:

$$\begin{aligned} V &= \iint_{R_1} \left[\frac{a^2 - x^2 - y^2}{a} - (a - x - y) \right] dx dy + \iint_{R_2} \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a} dx dy \\ &= \iint_{R_1 \cup R_2} \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a} dx dy - \iint_{R_1} (a - x - y) dx dy. \end{aligned}$$

Para resolver la primera integral hacemos el cambio a coordenadas polares mientras que la segunda integral la resolvemos directamente (como región de tipo I):

$$V = \int_0^{\pi/2} dv \int_0^a u \cdot \frac{a^2 - u^2}{a} du - \int_0^a dx \int_0^{a-x} (a - x - y) dy = \frac{\pi a^3}{8} - \frac{a^3}{6}.$$

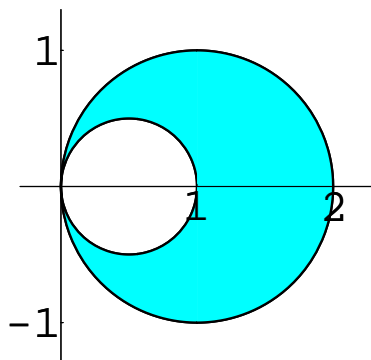
ii) El sólido es la figura comprendida entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y cuya base es región R exterior a la circunferencia $x^2 + y^2 = x$ e interior a la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$.



De este modo,

$$V = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy,$$

que escribimos en coordenadas polares para simplificar la región de integración, que se ilustra en la figura.



Así pues,

$$V = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dv \int_{\cos v}^{2 \cos v} u^3 du = \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 15 \cos^4 v dv = \frac{45\pi}{32}.$$

4. INTEGRALES TRIPLES.

En este curso se estudian las funciones $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, es decir, funciones definidas sobre el espacio euclídeo de dimensión n

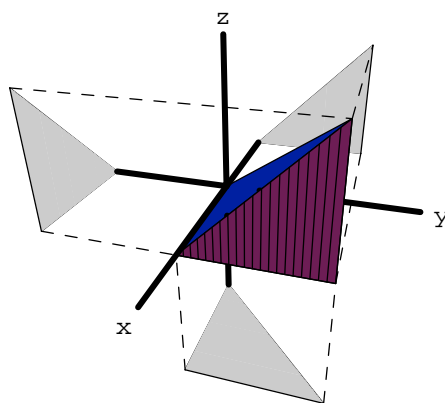
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n\},$$

y con imagen en el espacio análogo de dimensión m , \mathbb{R}^m .

PROBLEMA 5.56

Dada la integral $\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$, dibujar la región de integración y escribir la integral de todas las formas posibles.

Solución



Teniendo en cuenta la gráfica adjunta, si D_1 , D_2 y D_3 son las proyecciones sobre los tres planos coordenados, las diferentes formas de escribir la integral son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} dx dy \int_0^y f dz &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f dz = \int_0^1 dy \int_y^1 dx \int_0^y f dz, \\
\iint_{D_2} dx dz \int_z^x f dy &= \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_z^x f dy = \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x f dy, \\
\iint_{D_3} dy dz \int_y^1 f dx &= \int_0^1 dy \int_0^y dz \int_y^1 f dx = \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_y^1 f dx.
\end{aligned}$$

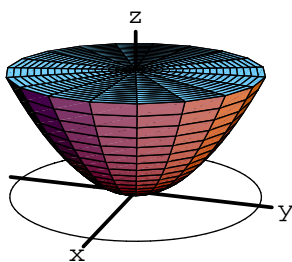
PROBLEMA 5.57

Calcular las siguientes integrales triples:

- i) $\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$, donde V está limitado por las superficies $x^2 + y^2 = 2z$, $z = 2$.
- ii) $\iiint_W (1 + z^2) dx dy dz$, siendo W la región limitada por $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$.

Solución

- i) La región de integración es el interior del paraboloide limitado por el plano $z = 2$.



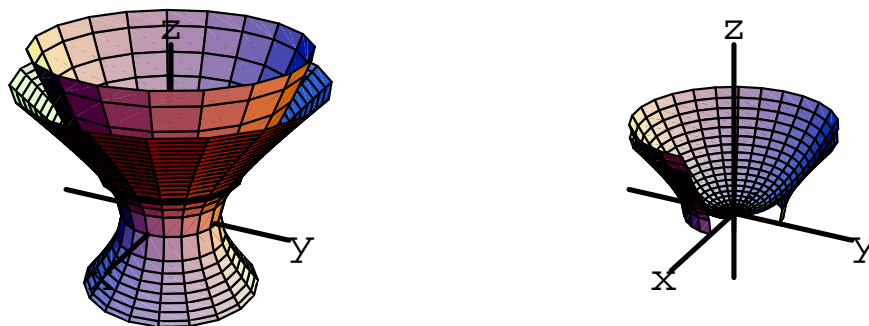
Como la proyección de dicha región sobre el plano $z = 0$ es el círculo C : $x^2 + y^2 \leq 4$, la integral triple se puede descomponer entonces como

$$I = \iint_C dx dy \int_{(x^2+y^2)/2}^2 (x^2 + y^2) dz.$$

Al escribir la integral en coordenadas cilíndricas, se obtiene:

$$I = \int_0^{2\pi} dv \int_0^2 u du \int_{u^2/2}^2 u^2 dz = 2\pi \int_0^2 u^3 \cdot (2 - u^2/2) du = \frac{16\pi}{3}.$$

ii) La intersección del paraboloide $2az = x^2 + y^2$ con el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ da la circunferencia $x^2 + y^2 = 2a^2$ situada en el plano $z = a$. Esto indica que ambas superficies son tangentes a lo largo de dicha circunferencia; por ello deducimos que la región de integración está limitada superiormente por el paraboloide, inferiormente por el plano $z = 0$ y lateralmente por el hiperboloide (en la figura se muestran dos vistas de la región de integración).



Debemos descomponer la integral en dos sumandos pues, si (x, y) está en el círculo de centro el origen y radio a , entonces z está comprendido entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $2az = x^2 + y^2$ y, si (x, y) está entre el círculo anterior y el círculo de radio $a\sqrt{2}$, entonces z está comprendido entre el hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ y el paraboloide anterior.

La fórmula que se obtiene es pues

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} dx dy \int_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}} (1+z^2) dz + \iint_{a^2 \leq x^2+y^2 \leq 2a^2} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}^{\frac{x^2+y^2}{2a}} (1+z^2) dz.$$

Para resolver las integrales, las escribimos en coordenadas cilíndricas. Así,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} dv \int_0^a u du \int_0^{u^2/2a} (1+z^2) dz + \int_0^{2\pi} dv \int_a^{a\sqrt{2}} u du \int_{\sqrt{u^2-a^2}}^{u^2/2a} (1+z^2) dz \\ &= \dots = (10 + a^2)\pi a^3/30. \end{aligned}$$

[Todas las integrales a resolver son casi inmediatas.]

PROBLEMA 5.58

Calcular $\iiint_S (1+x+y+z)^{-3} dx dy dz$, donde S es el tetraedro limitado por los tres planos coordenados y el plano de ecuación $x+y+z=1$.

Solución

Si llamamos D a la proyección de la región de integración sobre el plano XY , podemos escribir la integral como

$$I = \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3} dz \right) dx dy.$$

Como, a su vez, D es el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, la integral se descompone en las siguientes integrales iteradas:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (1+x+y+z)^{-3} dz \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left[-\frac{y}{8} + \frac{(1+x+y)^{-2}}{2} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x-1}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2(1+x)} \right] dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.59

Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies:

i) $a^2 = x^2 + z^2$, $x+y=\pm a$, $x-y=\pm a$.

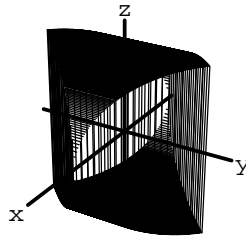
ii) $z = x^2 + y^2$, $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = x/2$, $y = 2x$, $z = 0$.

iii) $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} + \sqrt{\frac{z}{c}} = 1$, $x, y, z \geq 0$.

iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, $(z > 0)$.

Solución

i) La región a considerar es el interior del cilindro $a^2 = x^2 + z^2$ cortado por los cuatro planos $x + y = a$, $x + y = -a$, $x - y = a$, $x - y = -a$.

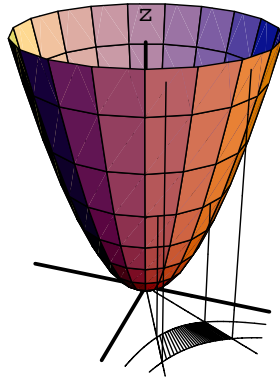


Como la proyección del sólido sobre el plano XY es el cuadrado R limitado por las rectas $x + y = a$, $x + y = -a$, $x - y = a$, $x - y = -a$, el volumen se calcula por la fórmula

$$\begin{aligned} V &= \int_R dx dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dz = 2 \int_R \sqrt{a^2-x^2} dx dy \\ &= 2 \int_{-a}^0 dx \int_{-x-a}^{x+a} \sqrt{a^2-x^2} dy + 2 \int_0^a dx \int_{x-a}^{-x+a} \sqrt{a^2-x^2} dy = 2a^3\pi - 8a^3/3. \end{aligned}$$

[Para calcular las integrales se puede hacer alguna sustitución trigonométrica.]

ii) El sólido consiste en la región limitada entre el plano XY y el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y cuya proyección sobre el plano XY es la región R limitada por las curvas $xy = a^2$, $xy = 2a^2$, $y = x/2$, $y = 2x$ (en realidad la región es unión de dos regiones, una de ellas en el primer cuadrante y otra en el tercer cuadrante; como las regiones tienen la misma área y la función $z = x^2 + y^2$ es simétrica, bastará multiplicar por dos el resultado obtenido al considerar únicamente la parte del primer cuadrante).



Podemos pues escribir el volumen como:

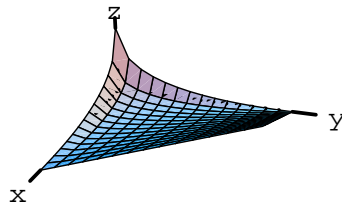
$$V = 2 \iint_R dx dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \iint_R (x^2 + y^2) dx dy.$$

Para calcular la integral doble sobre la región R , realizamos el cambio de variables dado por las ecuaciones $xy = u$, $x/y = v$.

Este cambio hace que $\left| J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \right| = \frac{1}{2v}$ y que la nueva región de integración sea $R' = \{(u,v) : a^2 \leq u \leq 2a^2, 1/2 \leq v \leq 2\}$. El volumen se calcula entonces como

$$V = 2 \int_{a^2}^{2a^2} du \int_{1/2}^2 \left(uv + \frac{u}{v}\right) \cdot \frac{1}{2v} dv = \frac{9a^4}{2}.$$

iii) El sólido está ahora comprendido entre la función dada y los planos coordenados.



Su proyección sobre el plano XY es la región R del primer cuadrante limitada por los ejes coordenados y la astroide de ecuación $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$, de modo que el volumen es sencillamente

$$\begin{aligned} V &= \iint_R \int_0^{c(1-\sqrt{x/a}-\sqrt{y/b})^2} dz \\ &= \int_0^a dx \int_0^{b(1-\sqrt{x/a})^2} c(1 - \sqrt{x/a} - \sqrt{y/b})^2 dy = \frac{abc}{90}. \end{aligned}$$

[Todas las integrales son inmediatas.]

iv) Ahora el sólido es la región limitada superiormente por el elipsoide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ e inferiormente por el cono $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$, por encima del plano XY . Como la intersección de ambas superficies es la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1/2$, situada en el plano $z = c/\sqrt{2}$, el volumen se expresa mediante la integral

$$V = \iint_R dx dy \int_{c\sqrt{x^2/a^2 + y^2/b^2}}^{c\sqrt{1-x^2/a^2 - y^2/b^2}} dz,$$

donde R es la región limitada por la citada elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1/2$.

Para calcular dicha integral hacemos el cambio de variables $x = (a/\sqrt{2})u \cos v$, $y = (a/\sqrt{2})u \sin v$, cuyo jacobiano vale $J = abu/2$. Con estos datos,

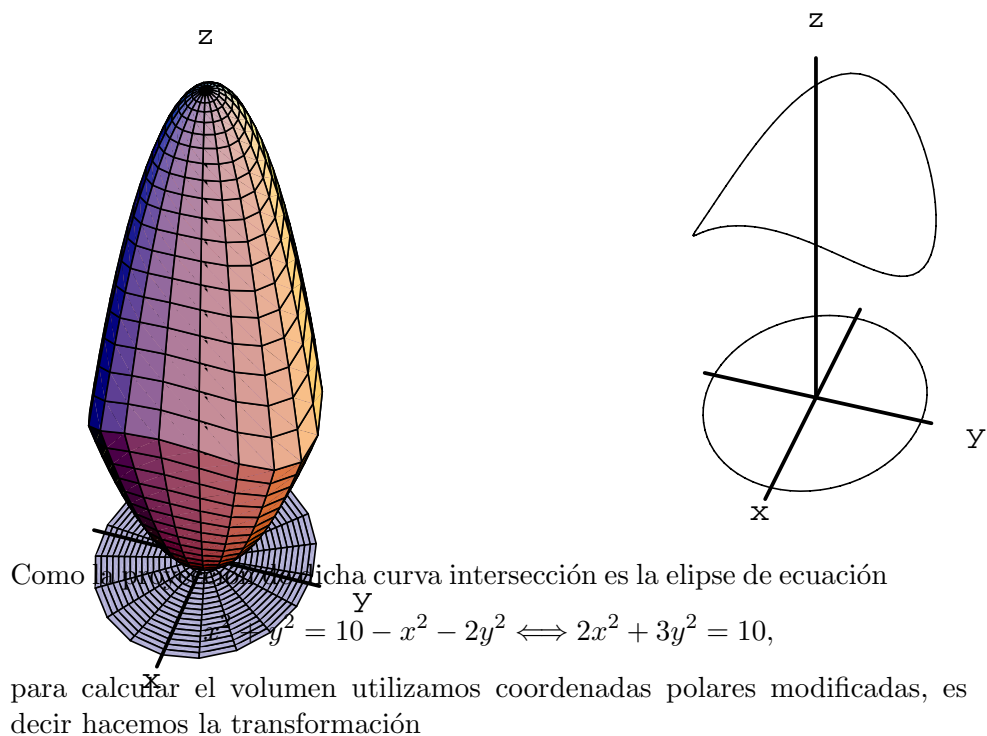
$$V = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 (c\sqrt{1-u^2/2} - c/2) \cdot \frac{abu}{2} du = \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)\pi ab.$$

PROBLEMA 5.60

Encontrar el volumen de la región acotada por las superficies $z = x^2 + y^2$, $z = 10 - x^2 - 2y^2$.

Solución

En la figura del lado izquierdo se muestran los dos paraboloides que limitan la región, y en el lado derecho se ilustra la curva intersección y su proyección sobre el plano XY .



$$\begin{aligned} x\sqrt{2/10} &= u \cos v, \\ y\sqrt{3/10} &= u \sin v, \end{aligned}$$

cuyo jacobiano es $J = \begin{vmatrix} \frac{\cos v}{\sqrt{2/10}} & \frac{-u \sin v}{\sqrt{2/10}} \\ \frac{\sin v}{\sqrt{3/10}} & \frac{u \cos v}{\sqrt{3/10}} \end{vmatrix} = \frac{10u}{\sqrt{6}}$. El volumen se calcula entonces por la fórmula

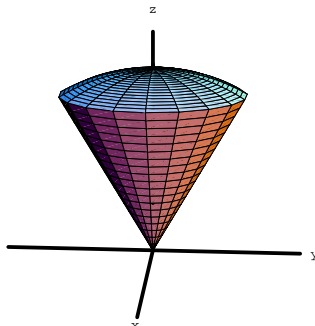
$$\begin{aligned} V &= \iint_R [10 - x^2 - 2y^2 - (x^2 + y^2)] dx dy \\ &= \int_0^1 du \int_0^{2\pi} \frac{10u}{\sqrt{6}} \cdot (10 - 10u^2) dv = \frac{200\pi}{\sqrt{6}} \int_0^1 (u - u^3) du = \frac{50\pi}{\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.61

Calcular el volumen del sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z^2 \geq 3(x^2 + y^2), z \geq 0\}.$$

Solución



Como la intersección de las dos superficies es la curva

$$x^2 + y^2 = 1/4, \quad z = \sqrt{3}/2,$$

el volumen, en coordenadas cartesianas, se escribe como:

$$V = \int_{-1/2}^{1/2} dx \int_{-\sqrt{1/4-x^2}}^{\sqrt{1/4-x^2}} dy \int_{\sqrt{3(x^2+y^2)}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz.$$

En coordenadas cilíndricas ($x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$, $z = z$), el volumen se escribe como

$$V = \int_0^{1/2} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{\rho\sqrt{3}}^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho dz.$$

En coordenadas esféricas ($x = \rho \cos \vartheta \sin \varphi$, $y = \rho \sin \vartheta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \varphi$), para calcular los extremos del ángulo φ sustituimos $\rho = 1$, $z = \sqrt{3}/2$ en la expresión de z . Resulta entonces que $\sqrt{3}/2 = \cos \varphi$, de donde $\varphi = \pi/6$.

El volumen se expresa mediante la integral

$$V = \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi/6} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho,$$

o bien (debido a las simetrías de la figura)

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{\pi/6} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi d\rho.$$

PROBLEMA 5.62

Calcular $\iiint_V ze^{-(x^2+y^2)} dx dy dz$, donde V está limitado por el cono $2(x^2+y^2) = z^2$ y el hiperboloide de dos hojas $x^2 + y^2 = z^2 - 1$.

Solución

Si resolvemos el sistema formado por ambas ecuaciones, obtenemos su intersección, que consiste en las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$, con $z = \pm\sqrt{2}$.

Escribimos la integral en coordenadas cilíndricas

$$\left. \begin{array}{l} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = z \end{array} \right\} 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2\pi, u\sqrt{2} \leq z \leq \sqrt{u^2 + 1}$$

con lo que resulta (teniendo en cuenta la simetría de la figura):

$$I = 2 \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 u du \int_{u\sqrt{2}}^{\sqrt{u^2+1}} z e^{-u^2} dz = 4\pi \int_0^1 u e^{-u^2} \frac{z^2}{2} \Big|_{u\sqrt{2}}^{\sqrt{u^2+1}} du = \dots = \frac{\pi}{e}.$$

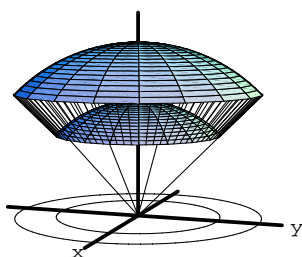
PROBLEMA 5.63

Calcular el volumen del casquete esférico limitado por

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= a^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= b^2 \\ x^2 + y^2 &= z^2, \end{aligned}$$

con $z \geq 0$, siendo $0 < a < b$.

Solución



Si escribimos el volumen en coordenadas esféricas, de acuerdo a la figura tenemos:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \sin \varphi & a \leq r \leq b \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi & \text{donde } 0 \leq \varphi \leq \pi/4. \\ z &= r \cos \varphi & 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \end{aligned}$$

Recordando que el jacobiano de la transformación es $J = r^2 \sin \varphi$, el volumen se escribe ahora de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V &= \int_a^b dr \int_0^{\pi/4} d\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi d\vartheta = \left(\frac{r^3}{3} \Big|_a^b \right) \cdot \left(-\cos \varphi \Big|_0^{\pi/4} \right) \cdot 2\pi \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) (b^3 - a^3). \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.64

- (a) Describir las superficies $r = \text{constante}$, $\vartheta = \text{constante}$, $z = \text{constante}$, en el sistema de coordenadas cilíndricas.
- (b) Idem para las superficies $r = \text{constante}$, $\vartheta = \text{constante}$, $\phi = \text{constante}$, en coordenadas esféricas.

Solución

a) De las ecuaciones que definen las coordenadas cilíndricas:

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta, \quad z = z,$$

al hacer $r = k$, obtenemos

$$x^2 + y^2 = k^2,$$

lo que corresponde a un cilindro con eje de simetría el eje Z y radio k .

Si hacemos $\vartheta = k$, basta dividir las dos primeras coordenadas para obtener

$$\frac{y}{x} = \tan k,$$

lo que corresponde a un plano vertical que pasa por el origen (los distintos valores de k dan los diferentes ángulos con respecto al plano $y = 0$).

Si hacemos $z = k$, esta misma ecuación representa un plano horizontal de altura k .

b) Las coordenadas esféricas de un punto se obtienen mediante las ecuaciones

$$x = \rho \cos \vartheta \sin \phi, \quad y = \rho \sin \vartheta \sin \phi, \quad z = \rho \cos \phi.$$

Si hacemos $\rho = k$, obtenemos

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2,$$

es decir la esfera centrada en el origen con radio k .

Si hacemos $\vartheta = k$, al igual que con las coordenadas cilíndricas,

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \vartheta,$$

que representa también un plano vertical.

Si, por último, escribimos $\phi = k$, resulta:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \rho^2 \operatorname{sen}^2 \phi \\ z^2 = \rho^2 \cos^2 \phi \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{z^2} = \operatorname{tg}^2 \phi,$$

que representa un cono de vértice el origen.

PROBLEMA 5.65

Calcular el momento de inercia de un sólido en forma de cono circular recto con densidad constante respecto a su eje.

Solución

Supongamos que el cono de altura h y radio en la base r tiene vértice en el origen y eje vertical. Entonces su ecuación es

$$z^2 = \frac{h^2}{r^2}(x^2 + y^2).$$

Si la densidad en cada punto del sólido es k , el momento de inercia respecto al eje Z viene dada por la fórmula:

$$I_z = \iiint_S k(x^2 + y^2) dV.$$

Para resolver la integral, escribimos el sólido en coordenadas cilíndricas, $x = u \cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$. La ecuación del cono se escribe entonces como $z = hu/r$ y la integral pedida

$$I_z = \int_0^{2\pi} dv \int_0^r du \int_{hu/r}^h k \cdot u^3 dz = 2\pi k \int_0^r u^3 \left(h - \frac{uh}{r} \right) du = \frac{\pi k h r^4}{10}.$$

Otra forma de resolver la integral consiste en realizar la transformación a coordenadas esféricas, $x = \varphi \cos \vartheta \sin \phi$, $y = \varphi \sin \vartheta \sin \phi$, $z = \varphi \cos \phi$. De este modo la ecuación del plano $z = h$ se escribe como $\varphi = h/\cos \phi$, y la integral es ahora

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\arctg(r/h)} d\phi \int_0^{h/\cos \phi} k \cdot \varphi^2 \sin^2 \phi \cdot \varphi^2 \sin \phi d\varphi \\ &= 2\pi k \int_0^{\arctg(r/h)} \sin^3 \phi \cdot \frac{h^5}{5 \cos^5 \phi} d\phi \\ &= \frac{2\pi k h^5}{5} \int_0^{\arctg(r/h)} \operatorname{tg}^3 \phi \cdot \sec^2 \phi d\phi = \frac{2\pi k h^5}{5} \cdot \frac{r^4}{4h^4}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.66

Calcular el momento de inercia alrededor del eje Z del sólido de densidad constante limitado por el elipsoide $36x^2 + 9y^2 + 4z^2 = 36$.

Solución

Por definición,

$$M_z = \iiint_{\Omega} \rho \cdot (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

pues $x^2 + y^2$ es el cuadrado de la distancia de un punto del sólido al eje Z .

Si escribimos la ecuación del elipsoide como

$$\Omega : x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 1,$$

el cambio a coordenadas esféricas viene dado por:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \vartheta \sin \varphi \\ y &= 2r \sin \vartheta \sin \varphi \\ z &= 3r \cos \varphi \end{aligned} \right\}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Como

$$J\left(\frac{x, y, z}{r \varphi \vartheta}\right) = -6r^2 \sin \varphi,$$

la integral se escribe como

$$M_z = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi \rho(r^2 \cos^2 \vartheta \sin^2 \varphi + 4r^2 \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi) \cdot 6r^2 \sin \varphi d\varphi = 8\rho\pi.$$

PROBLEMA 5.67

Hallar $\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{[1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}]^{3/2}} dx dy dz.$

Solución

Si realizamos la transformación a coordenadas esféricas, $x = \varphi \cos \vartheta \sin \phi$, $y = \varphi \sin \vartheta \sin \phi$, $z = \varphi \cos \phi$, como el valor absoluto del jacobiano de la transformación es $J = \rho^2 \sin \phi$, la integral se escribe como:

$$I = \int_0^\infty d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi \frac{\rho^2 \sin \phi}{(1 + \rho^3)^{3/2}} d\phi.$$

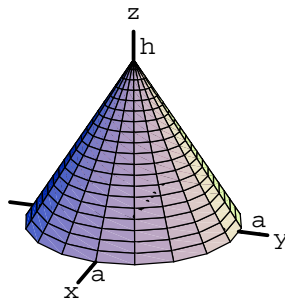
Para resolver la integral, como las variables están separadas, basta multiplicar las tres integrales simples. Tenemos así:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{\rho^2}{(1 + \rho^3)^{3/2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \\ &= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty 3\rho^2(1 + \rho^3)^{-3/2} d\rho = \frac{4\pi}{3} \lim_{b \rightarrow \infty} -2(1 + \rho^3)^{-1/2} \Big|_0^b = \frac{8\pi}{3}. \end{aligned}$$

PROBLEMA 5.68

Calcular $\iiint_R (y^2 + z^2) dx dy dz$, siendo R un cono recto de revolución de altura h , base situada en el plano XY y de radio a y eje en el eje Z .

Solución



La figura adjunta muestra el cono descrito, el cual tiene por ecuación $a^2(h - z)^2 = h^2(x^2 + y^2)$. Pasando la integral a coordenadas cilíndricas, $x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = z$, tenemos:

$$I = \int_0^a du \int_0^{2\pi} dv \int_0^{h(a-u)/a} u(u^2 \sin^2 v + z^2) dz = \dots = \frac{a^4 h \pi}{20} + \frac{h^3 a^2 \pi}{30}.$$

5. EJERCICIOS PROPUESTOS.

1.- Determinar los límites de integración de la integral doble $\iint_S f(x, y) dx dy$ para las regiones siguientes:

i) S es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(-2, 1)$.

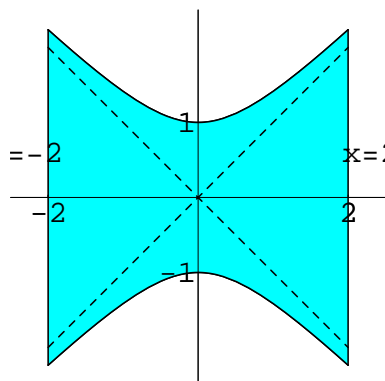
ii) S está limitado por las dos rectas $x = -2$, $x = 2$ y por las dos ramas de la hipérbola $y = \sqrt{1+x^2}$, $y = -\sqrt{1+x^2}$.

iii) S es el anillo $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

Resp.: i) $\iint_S f(x, y) dx dy = \int_0^1 dy \int_{-2y}^{2y} f(x, y) dx$.

ii) Observando la figura se obtiene inmediatamente que

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y) dy.$$



iii) $\iint_S f(x, y) dx dy = \int_1^2 du \int_0^{2\pi} u \cdot f(u \cos v, u \sin v) dv$.

2.- Probar que $\int_0^x dt \int_0^t F(u) du = \int_0^x (x-u)F(u) du$.

Resp.: Al invertir el orden de integración, resulta

$$\int_0^x dt \int_0^t F(u) du = \int_0^x du \int_u^x F(u) dt = \int_0^x (x-u)F(u) du.$$

3.- Sea R la mayor de las dos regiones limitadas por la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y la recta $x = 3$. Escribir los límites de integración de la integral $\iint_R f$ correspondientes a ambos órdenes de integración.

$$\begin{aligned} \text{Resp.: } I &= \int_{-5}^3 dx \int_{-\sqrt{25-x^2}}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y) dy = \int_{-5}^{-4} dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx \\ &+ \int_{-4}^4 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^3 f(x, y) dx + \int_4^5 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y) dx. \end{aligned}$$

4.- Cambiar el orden de integración en las siguientes integrales dobles.

$$\text{a) } \int_{3\pi/2}^{9\pi/4} dx \int_{\sin x}^{\cos x} f(x, y) dy.$$

$$\text{b) } \int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1-\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy.$$

$$\begin{aligned} \text{Resp.: a) } I &= \int_{-1}^0 dy \int_{3\pi/2}^{2\pi+\arcsin y} f dx + \int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_{2\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f dx \\ &+ \int_{\sqrt{2}/2}^1 dy \int_{2\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y} f dx. \end{aligned}$$

$$\text{b) } I = \int_0^1 dy \int_{y^{3/2}}^{2-\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x, y) dx.$$

5.- Dibujar la región de integración e invertir el orden de integración en los siguientes casos:

$$\text{(a) } \int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy.$$

$$\text{(b) } \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} f(x, y) dy.$$

$$\text{(c) } \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) dx.$$

$$\text{(d) } \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy.$$

$$\text{Resp.: (a) } \int_0^2 dy \int_{y/3}^{y/2} f(x, y) dx + \int_2^3 dy \int_{y/3}^1 f(x, y) dx.$$

$$\text{(b) } \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x, y) dx.$$

$$\text{(c) } \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy.$$

$$(d) \int_0^1 dy \int_{\arcsen y}^{\pi - \arcsen y} f(x, y) dx.$$

6.- Siendo el dominio D el triángulo definido por las rectas $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$, hallar $I = \iint_D (x - 2y) dx dy$.

Resp.: $I = -4/3$.

7.- Calcular

$$(a) \int_0^a dy \int_0^{\sqrt{a^2 - y^2}} (x^2 + y^2) dx \quad (a > 0).$$

$$(b) \int_0^{2a} dx \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} dy.$$

Resp.: (a) $a^4\pi/8$; (b) $a^2\pi/2$.

8.- Calcular las siguientes integrales y dibujar la región de integración:

$$i) \iint_{|x|+|y|\leq 1} |x| dx dy.$$

$$ii) \int_0^4 dy \int_{y/2}^2 e^{x^2} dx.$$

$$iii) \int_1^2 dx \int_{1/x}^1 \frac{x^2}{y^2} dy.$$

$$iv) \int_0^1 dx \int_x^1 (x + y) dy.$$

$$v) \int_{-1}^0 dx \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x dy.$$

Resp.: i) $2/3$; ii) $e^4 - 1$; iii) $17/12$; iv) $1/2$; v) $-2/3$.

9.- Dada la siguiente integral

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^y (x^2 + y^2) dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx \right) dy$$

(a) Dibujar la región de integración.

(b) Expresar la integral invirtiendo el orden de integración.

(c) Resolver la integral.

Resp.: $I = \int_0^1 dx \int_x^{2-x} (x^2 + y^2) dy = 4/3.$

10.- Dada la siguiente integral $\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{y-4}{2}} dx$:

- a) Dibujar la región de integración.
- b) Invertir el orden de integración.
- c) Resolver la integral.

Resp.: $I = \int_{-2}^0 dx \int_{2x+4}^{4-x^2} dy = 4/3.$

11.- Contestar verdadero o falso a los siguientes planteamientos, justificando su respuesta:

- a) Sea $z = f(x, y)$ una función definida en el círculo R de centro el origen y radio a , y que verifica $f(x, y) = -f(-x, -y)$, $\forall (x, y) \in R$.
Entonces $\iint_R f(x, y) dx dy = 0$.

- b) Si $S = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$, entonces $\iint_S f(x+y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du$.

Resp.: a) Verdadero (hacer el cambio de variables $u = -x$, $v = -y$).

b) Verdadero (hacer el cambio de variables $u = x + y$, $v = x - y$).

12.- Calcular $\iint_D x dx dy$, siendo D la región limitada por las parábolas $x + y^2 = 0$, $x + y^2 = 2y$ y $x + y^2 = 2 - 2y$.

Sugerencia: Hacer el cambio de variables $x = u - \frac{(u+v)^2}{4}$, $y = \frac{u+v}{2}$.

Resp.: $1/48$.

13.- Calcular $\iint_D f$ en los siguientes casos:

- (a) $f(x, y) = x^3 y$, D limitada por el eje Y y la parábola $x = -4y^2 + 3$.
- (b) $f(x, y) = y$, $D = \{(x, y) : 0 \leq 2x/\pi \leq y \leq \sin x\}$.
- (c) $f(x, y) = xy$, D está limitado por el eje X y la semicircunferencia superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$.

(d) $f(x, y) = \sqrt{xy - y^2}$, D es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(10, 1)$.

(e) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2a - x}}$, D es el círculo tangente a los ejes coordenados de radio a y situado en el primer cuadrante.

(f) $f(x, y) = 1 + xy$, $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, y \geq 0\}$.

(g) $f(x, y) = y^2\sqrt{x}$, $D = \{(x, y) : x > 0, y > x^2, y < 10 - x^2\}$.

Resp.: (a) $\int_{-\sqrt{3}/2}^{\sqrt{3}/2} dy \int_0^{-4y^2+3} x^3 y dx = 0.$

(b) $\int_0^{\pi/2} dx \int_{2x/\pi}^{\sin x} y dy = \frac{\pi}{24}.$

(c) $\int_1^3 dx \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy dy = \frac{4}{3}.$

(d) $\int_0^1 dy \int_y^{10y} \sqrt{xy - y^2} dx = 6.$

(e) $\int_0^{2a} dx \int_{a-\sqrt{a^2-(x-a)^2}}^{a+\sqrt{a^2-(x-a)^2}} \frac{1}{\sqrt{2a-x}} dy = \frac{8a\sqrt{2a}}{3}.$

(f) $\int_0^\pi dv \int_1^{\sqrt{2}} u(1 + u^2 \sin v \cos v) du = \pi/2.$

(g) $\int_0^{\sqrt{5}} dx \int_{x^2}^{10-x^2} y^2 \sqrt{x} dy = \frac{78800}{693} 5^{3/4}.$

14.- Calcular $\iint_R x^2 y^2 dx dy$ siendo R la zona limitada por $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ e $y = 4x$.

Resp.: Se hace el cambio de variables $xy = u$, $y/x = v$, de modo que

$$J\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{1}{2v}. \text{ Así:}$$

$$I = \int_1^4 dv \int_1^2 u^2 \cdot \frac{1}{2v} du = \frac{7 \ln 4}{6}.$$

15.- Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -\Phi(x) \leq y \leq \Phi(x), a \leq x \leq b\}$, donde Φ es una función continua, no negativa en el intervalo $[a, b]$. Si $z = f(x, y)$ es una función en D tal que $f(x, y) = -f(x, -y)$, para todo $(x, y) \in D$, probar que $\iint_D f(x, y) dx dy = 0$.

Resp.: Descomponemos la integral en dos sumandos y hacemos el cambio de variables $u = x$, $v = -y$ en el primero. Así:

$$\begin{aligned}\iint_D f(x, y) dx dy &= \int_a^b dx \int_{-\Phi(x)}^0 f(x, y) dy + \int_a^b dx \int_0^{\Phi(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_a^b du \int_0^{\Phi(u)} f(u, -v) dv + \int_a^b dx \int_0^{\Phi(x)} f(x, y) dy \\ &= \int_a^b du \int_0^{\Phi(u)} -f(u, v) dv + \int_a^b dx \int_0^{\Phi(x)} f(x, y) dy = 0.\end{aligned}$$

16.- Si D es la semicorona circular situada por encima del eje de abscisas y determinada por $x^2 + y^2 = 5^2$ y $x^2 + y^2 = 3^2$, hallar $I = \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$.

Resp.: $I = \int_3^5 r dr \int_0^\pi \sin \vartheta d\vartheta = 16.$

17.- Pasar a polares la integral $\iint_D f(x, y) dx dy$ en los siguientes casos:

- i) D es el círculo: $x^2 + y^2 \leq a^2$.
- ii) D es el anillo circular: $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$.
- iii) D es el recinto limitado por la circunferencia: $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$.
- iv) D es el recinto limitado por la elipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- v) D es el triángulo del primer cuadrante limitado por los ejes coordenados y la recta $x + y = 1$.
- vi) D es el segmento parabólico $-a \leq x \leq a$, $x^2/a \leq y \leq a$.
- vii) $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x\sqrt{3}\}$.

Resp.: i) $I = \int_0^{2\pi} dv \int_0^a u \cdot f(u \cos v, u \sin v) du.$

ii) $I = \int_0^{2\pi} dv \int_a^b u \cdot f(u \cos v, u \sin v) du.$

iii) $I = \int_{-\pi}^\pi dv \int_0^{2a \cos v} u \cdot f(u \cos v, u \sin v) du.$

iv) $I = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 abu \cdot f(au \cos v, bu \sin v) du.$

$$\text{v)} \quad I = \int_0^{\pi/2} dv \int_0^{\frac{1}{\cos v + \sin v}} u \cdot f(u \cos v, u \sin v) du.$$

$$\begin{aligned} \text{vi)} \quad I &= \int_0^{\pi/4} dv \int_0^{a \sin v / \cos^2 v} u \cdot f du + \int_{\pi/4}^{3\pi/4} dv \int_0^{a / \sin v} u \cdot f du \\ &+ \int_{3\pi/4}^{\pi} dv \int_0^{a \sin v / \cos^2 v} u \cdot f du. \end{aligned}$$

$$\text{vii)} \quad I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} dv \int_0^{2/\cos v} u \cdot f(u \cos v, u \sin v) du.$$

18.- Hallar $I = \iint_D dx dy$, siendo D la elipse $x^2/16 + y^2/9 = 1$.

Resp.: 12π .

19.- Calcular las siguientes integrales:

$$\text{i)} \quad \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{x^2+y^2} dx dy.$$

$$\text{ii)} \quad \iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} dx dy, \text{ siendo } D \text{ la semicorona circular situada por encima del eje de abscisas y determinada por } x^2+y^2=5^2 \text{ y } x^2+y^2=3^2.$$

Resp.: i) $2a^3\pi/3$; ii) 16 .

20.- Calcular $\iint_D (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dx dy$, donde D es el sector circular contenido en el primer cuadrante del círculo de centro $(0,0)$ y radio 2.

$$\text{Resp.: } I = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dy = \frac{16\pi}{3}.$$

21.- Hallar el área de la región limitada por:

$$\text{a)} \quad \text{La curva } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x}{h} + \frac{y}{k} \text{ con los parámetros positivos.}$$

$$\text{b)} \quad \text{Las curvas } y = ax^p, \quad y = bx^p, \quad y = cx^q, \quad y = dx^q, \quad 0 < p < q, \quad 0 < a < b, \quad 0 < c < d.$$

$$\text{Resp.: a)} \quad \pi ab \left(\frac{a^2}{4h^2} + \frac{b^2}{4k^2} \right).$$

b) (Hacer el cambio de variables $u = y/x^p$, $v = y/x^q$);

$$A = \frac{q-p}{(1+q)(-1-p)} \left(b^{\frac{1+q}{q-p}} - a^{\frac{1+q}{q-p}} \right) \cdot \left(d^{\frac{-1-p}{q-p}} - c^{\frac{-1-p}{q-p}} \right).$$

22.- Calcular

$$\iint_D |\cos(x+y)| \, dx dy,$$

siendo $D = [-\pi/2, \pi/2] \times [-\pi/2, \pi/2]$.

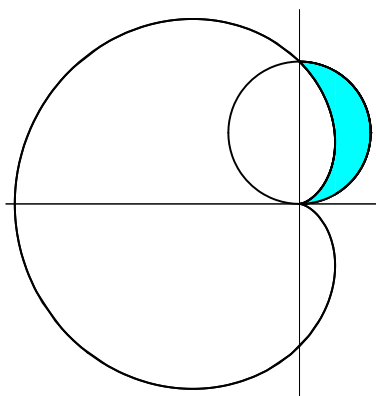
Resp.:

23.- Calcular el volumen de la región limitada por el cono $9(x^2 + y^2) - 4(6-z)^2 = 0$, en $0 \leq z \leq 3$, por la esfera $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 4$, en $z \geq 3$, por el plano $z = 0$ y por el paraboloide $x^2 + y^2 = 4 - z$.

Resp.:

24.- Hallar el área interior a $\rho = \sin \vartheta$ y exterior a $\rho = 1 - \cos \vartheta$.

Resp.: $A = (4 - \pi)/4$.



25.- Calcular el volumen de las siguientes figuras:

(a) Región interior a la superficie $z = x^2 + y^2$ comprendida entre $z = 0$ y $z = 10$.

(b) Pirámide limitada por los tres planos coordenados y el plano $x + 2y + 3z = 6$.

(c) Elipsoide con semiejes a , b , c .

Resp.: (a) 50π ; (b) 6; (c) $4\pi abc/3$.

26.- Calcular el volumen del sólido limitado por el hiperboloide $4(x^2 + y^2) = 1 + 4z^2$, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$.

Resp.:

27.- Sea I el valor de la integral de $f(x, y) = x + y$ en $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 4, x \geq 2, y \geq 0\}$. ¿Cuál (o cuáles) de las siguientes afirmaciones es cierta?

i) $I = \int_0^2 dy \int_2^{4-y} f(x, y) dx.$

ii) $I = \int_2^4 dx \int_0^{4-x} f(x, y) dy.$

iii) $I = \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_{2/\cos \vartheta}^{\frac{4}{\sin \vartheta + \cos \vartheta}} \frac{1}{\sin \vartheta + \cos \vartheta} dr.$

iv) $I = \int_2^4 dv \int 2^v \frac{1}{v} du, \text{ con } u = x, v = x + y.$

Resp.:

28.- Hallar el volumen limitado por $x = 0$, $y = 0$, el paraboloide $z = x^2 + y^2 + 10$, su plano tangente en el punto $(1, 1, 12)$ y el plano $x + 2y = 7$.

Resp.: $V = \int_0^7 dx \int_0^{\frac{7-x}{2}} dy \int_{2x+2y+8}^{x^2+y^2+10} dz = \frac{6125}{96}.$

29.- Calcular el volumen de la región limitada por la función $z = \cos(x - y)$ y el plano $z = 0$ encerrada en el cuadrado $[0, \pi] \times [0, \pi]$.

Resp.: $V = \iint_{(x,y) \in [0,\pi] \times [0,\pi]} |\cos(x - y)| dx dy = 2\pi.$

30.- Calcular el volumen comprendido entre la superficie $z = x^2 + 3y^2 + 2$, los planos coordenados y el plano $2x + y = 2$.

Resp.: $V = \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{x^2+3y^2+2} dz = 25/6.$

31.- Calcular el volumen comprendido entre las superficies $z = x^2 + y^2$, $x = y^2$ y los planos $x = 4$, $z = 0$.

Resp.: $V = \int_{-2}^2 dy \int_{y^2}^4 dx \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{8576}{105}.$

32.- Calcular los volúmenes de los cuerpos limitados por las siguientes superficies:

i) $x^2 + y^2 - az = 0$, $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$, $z = 0$.

ii) $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

iii) $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = z^2$.

iv) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 1/2$.

Resp.: i) $V = 4 \int_0^{\pi/4} dv \int_0^{a\sqrt{\cos 2v}} \frac{u^3}{a} du = \frac{\pi a^3}{8}$.

ii) $V = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{x^2+y^2} dz = \frac{88}{105}$.

iii) $V = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dxdy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} dz = \frac{2\pi}{3}$.

iv) $V = \iint_{x^2+y^2 \leq 3/4} dxdy \int_{1^2}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz = \frac{5\pi}{24}$.

33.- Encontrar el volumen de la región limitada por $z \leq 6 - x^2 - y^2$; $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$.

Resp.: $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} dxdy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{6-x^2-y^2} dz = \int_0^{2\pi} dv \int_0^2 du \int_u^{6-u^2} u dz = \frac{32\pi}{3}$.

34.- Calcular el volumen del sólido limitado por los cilindros $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, $x^2 + y^2 = 2x$, y los planos $z = 0$, $z = 2$.

Resp.: $4 \int_0^2 dz \int_1^{3/2} dx \int_0^{\sqrt{1-(x-2)^2}} dy = 8 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right)$.

35.- Calcular el volumen de la porción del cilindro $z^2 + y^2 = 6y$, situado dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

Resp.: $V = \int_0^6 dy \int_{-\sqrt{9-(y-3)^2}}^{\sqrt{9-(y-3)^2}} dz \int_{-\sqrt{36-y^2-z^2}}^{\sqrt{36-y^2-z^2}} dx = 144\pi - 192$.

36.- Encontrar el volumen del cuerpo limitado por los planos coordenados, el plano $2x + 3y - 12 = 0$ y el cilindro $z = y^2/2$.

Resp.: $V = \int_0^4 dy \int_0^{(12-3y)/2} dx \int_0^{y^2/2} dz = 16$.

37.- Calcular $\iiint_V x \, dx \, dy \, dz$, siendo V el sólido limitado por el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$, el paraboloide elíptico $z = x^2 + 3y^2$ y el plano $x = 0$.

Resp.:

38.- Hallar el volumen del sólido limitado por el hiperboloide $4(x^2 + y^2) = 1 + 4z^2$, el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $z = 0$.

Resp.:

39.- Hallar el volumen encerrado por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el hiperboloide $5x^2 + 5y^2 - 3z^2 = 3$.

Resp.:

40.- Calcular el volumen de la intersección entre la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = ay$, con $a > 0$.

$$\text{Resp.: } V = 2 \int_0^\pi dv \int_0^{a \sin v} u \cdot \sqrt{a^2 - u^2} \, du = \frac{2a^3}{9} \cdot (3\pi - 4).$$

41.- Calcular las siguientes integrales triples:

i) $\iiint_V xyz \, dx \, dy \, dz$, donde V es el recinto limitado por las superficies $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

ii) $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy \, dz$, donde V es el recinto limitado por $x^2 + y^2 = z^2$, $z = 1$.

iii) $\iiint_V \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) \, dx \, dy \, dz$, donde V está limitado por la superficie $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

$$\text{Resp.: i) } I = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^1 r^5 \sin^3 \varphi \cos \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta \, dr = \frac{1}{48}.$$

$$\text{ii) } I = \int_0^1 du \int_0^{2\pi} dv \int_u^1 u^2 \, dz = \frac{\pi}{6}.$$

$$\text{iii) } I = \int_0^\pi d\varphi \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 abc r^4 \sin \varphi \, dr = \frac{4\pi abc}{5}.$$

42.- Hallar el volumen del sólido W limitado por el cilindro parabólico $z = 4 - y^2$ y el paraboloide elíptico $z = x^2 + 3y^2$.

Resp.:

43.- Hallar el volumen del cuerpo limitado por $z = \ln(x + 2)$, $z = \ln(6 - x)$, $x = 0$, $y = 0$ y $x + y = 2$.

Resp.:

44.- Hallar el volumen de la región interior del cilindro $x^2 + y^2 = 4$ limitada por el paraboloide $z = 16 + x^2 + y^2$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Resp.:

45.- Dada la siguiente integral

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^y (x^2 + y^2) dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx \right) dy :$$

(a) Dibujar la región de integración.

(b) Expresar la integral invirtiendo el orden de integración.

(c) Resolver la integral.

Resp.:

46.- (a) Demostrar que toda sucesión convergente en \mathbb{R}^n es un conjunto de contenido cero.

(b) Demostrar que toda función real acotada es integrable sobre un subconjunto de contenido cero.

(c) Demostrar que, si f es real y continua en un n -intervalo cerrado $I \subset \mathbb{R}^n$ salvo quizás en un conjunto de contenido cero, entonces es integrable.

Resp.:

47.- Calcular $\iiint_{\Omega} (1 + x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ siendo Ω la esfera unidad.

Resp.:

48.- Calcular el volumen del cuerpo más pequeño limitado por las superficies:

$$y = x^2 + z^2 \quad \text{y} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2.$$

Resp.:

49.- Calcular el volumen del cuerpo limitado por $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$.

Resp.:

50.- Hallar el volumen del cuerpo limitado por las superficies: $z = \ln(x+2)$, $z = \ln(6-x)$, $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 2$.

Resp.:

51.- Calcular el volumen del cuerpo limitado por $x^2 + y^2 = az$, $x^2 + y^2 = z^2$ y $x^2 + y^2 + (z - a/2)^2 = a^2/4$.

Resp.:

52.- Calcular el volumen del cuerpo intersección de las regiones: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $x^2 + y^2 \leq z^2$, $x^2 + y^2 \leq 1/4$.

Resp.:

53.- a) Sea

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 2z, & \text{si } z > 0; \\ 3 - 4z, & \text{si } z < 0; \\ \operatorname{tg}^2(xy^2), & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Comprobar que es integrable y calcular la integral sobre la bola de radio unidad $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

b) Hallar el volumen del cuerpo limitado por $z = x^2 + y^2$, $z = 2x^2 + 2y^2$, $y = x$, $y = 2x$, $x = 0$, $x = 1$.

Resp.:

54.- ¿Cuál de las siguientes opciones corresponde a la integral $\iint_D x^2 dx dy$ sobre $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$?

(a) $\int_0^2 du \left(\int_0^{\sqrt{2u-u^2}} u^2 dv \right).$

(b) $\int_0^{\pi/2} dv \left(\int_0^{2 \cos v} 2u^3 \cos^2 v du \right).$

$$(c) \int_{-\pi}^{\pi} dv \left(\int_0^{2 \cos v} u^3 \cos^2 v \, du \right).$$

Resp.: En coordenadas polares, $D = \{(r, \vartheta) : -\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2 \cos \vartheta\}$.

Por tanto,

$$\iint_D x^2 dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2 \cos \vartheta} r \cdot r^2 \cdot \cos^2 \vartheta \, dr = 2 \int_0^{\pi/2} d\vartheta \int_0^{2 \cos \vartheta} r^3 \cos^2 \vartheta \, dr$$

de modo que la respuesta correcta es (b).

55.- Hallar el volumen del cuerpo $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, x^2 + y^2 \leq z^2 + 1\}$, siendo $a > 1$.

Resp.:

56.- Demostrar que toda función acotada es integrable Riemann sobre todo conjunto de contenido cero. Calcular la integral $\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz$

$$\text{siendo } f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ 1/2 & \text{si } z < 0 \text{ y } D : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1. \\ \operatorname{tg}^2(xy^2) & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

Resp.:

57.- Estudiar si existe y en su caso calcular $\iiint_D f(x, y, z) \, dx dy dz$,

$$\text{siendo } f(x, y, z) = \begin{cases} 2z & \text{si } z > 0 \\ 3 - 4z & \text{si } z < 0 \text{ y } D : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1. \\ \ln(1 + x^2 y^2) & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

Resp.:

58.- Determinar las coordenadas del centro de gravedad de la región sólida S limitada por las superficies $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $z = 0$, $x + z = 6$.

$$\text{Resp.: } v(S) = \int_0^6 dx \int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{6-x} dz = \frac{48\sqrt{6}}{5};$$

$$\bar{x} = 18/7, \bar{y} = 15\sqrt{6}/16, \bar{z} = 12/7.$$

59.- Sea f una función continua en una región

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), \psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)\}.$$

Probar que existe un punto $P \in S$ tal que $\iiint_S f(x, y, z) dV = f(P) \cdot \text{vol}(S)$ (teorema del valor medio para integrales).